Algorithmen im Chip-Entwurf 7

Exakte Optimierungsverfahren

Andreas Koch
FG Eingebettete Systeme
und ihre Anwendungen
TU Darmstadt

Überblick

- **Probleme im VLSI CAD-Bereich**
  - Am Beispiel: Travelling Salesman (TSP)
- **Exakte Verfahren**
  - Backtracking
  - Branch-and-Bound
  - Dynamic Programming
  - Integer Linear Programming
- **Zusammenfassung**

Art der Probleme

- Viele Probleme im Bereich VLSI CAD sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart

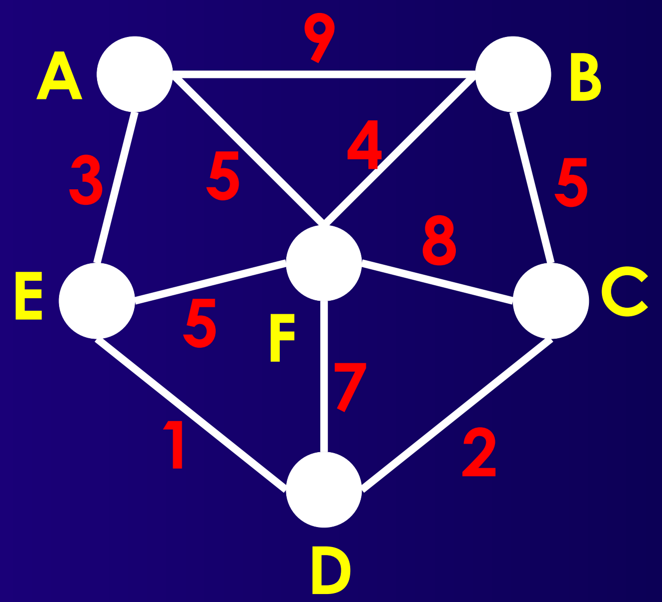
→ Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen

- Falls sub-optimale Lösungen akzeptabel
  - Näherungsverfahren
    - Garantieren eine vorgegebene Lösungsqualität
  - Heuristiken
    - Schwankende Lösungsqualität

Exakte Lösungsverfahren

- **Erschöpfende Suche**
  - Durchlaufen gesamten Lösungsraum
  - Beispiel: Backtracking
- **Eliminierung "schlechter" Ansätze**
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound
- **Wiederverwendung alter Ergebnisse**
  - Beispiel: Dynamic Programming
- **Mathematisches Modell**
  - Beispiel: (Integer) Linear Programming

Travelling Salesman Problem



- **TSP**
- ***Einfacher* Zyklus durch alle Knoten mit minimaler Länge**
  - Jeder Knoten nur einmal besucht
  - Minimale Kantengewichte
- **NP-vollständig**

Definitionen

- **Instanz $I = (F, c)$**
  - Lösungsraum F
  - Kostenfunktion $c: F \to \mathbb{R}$
- **Lösung $\underline{f} \in F$: $\underline{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$**
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche f_i
  - Implizite Einschränkungen: Abhängigkeiten
- **Teillösung $\tilde{\underline{f}}$**
  - Einige f_i undefiniert
  - Spannt Unterraum von F auf

Backtracking 1

- Systematisch durch ganzen Lösungsraum
- Beginne mit komplett undefinierter Teillösung, $k = 0$
- Weise f_k einen möglichen Wert zu
- Gehe zu nächstem f_k: $k = k + 1$
- Solange, bis
  - Komplette Lösung ($k = n$), neue beste Lösung?
  - oder implizite Einschränkungen greifen
- Zurück zu letztem änderbarem f_k

Backtracking 2

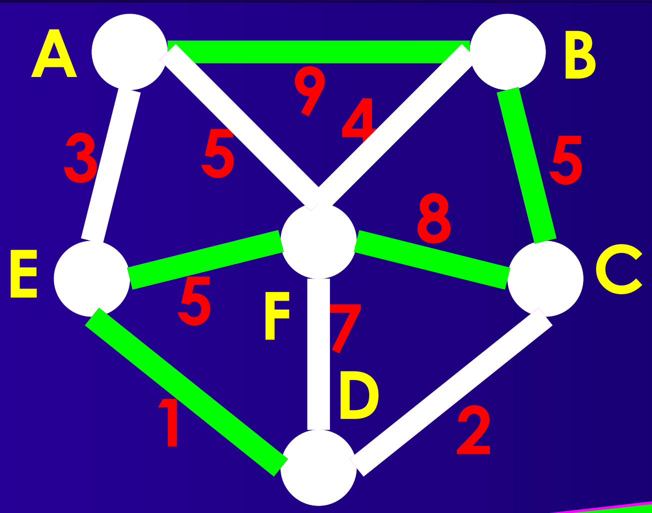
```
float best_cost;
solution_element cur_sol[n], best_sol[n];

backtrack(int k) {
        float new_cost;
        solution_element sol_el;
        if (k = n){
                new_cost := cost(cur_sol);
                if (new_cost < best_cost) {
                        best_cost       := new_cost;
                        best_sol        := copy(cur_sol);
                }
        } else
                foreach (sol_el ∈ allowed(cur_sol, k)) {
                        cur_sol[k] := sol_el;
                        backtrack(k+1);
                }
}
main {
        best_cost := ∞;
        backtrack(0);
        report(best_sol);
}
```

TSP via Backtracking 1

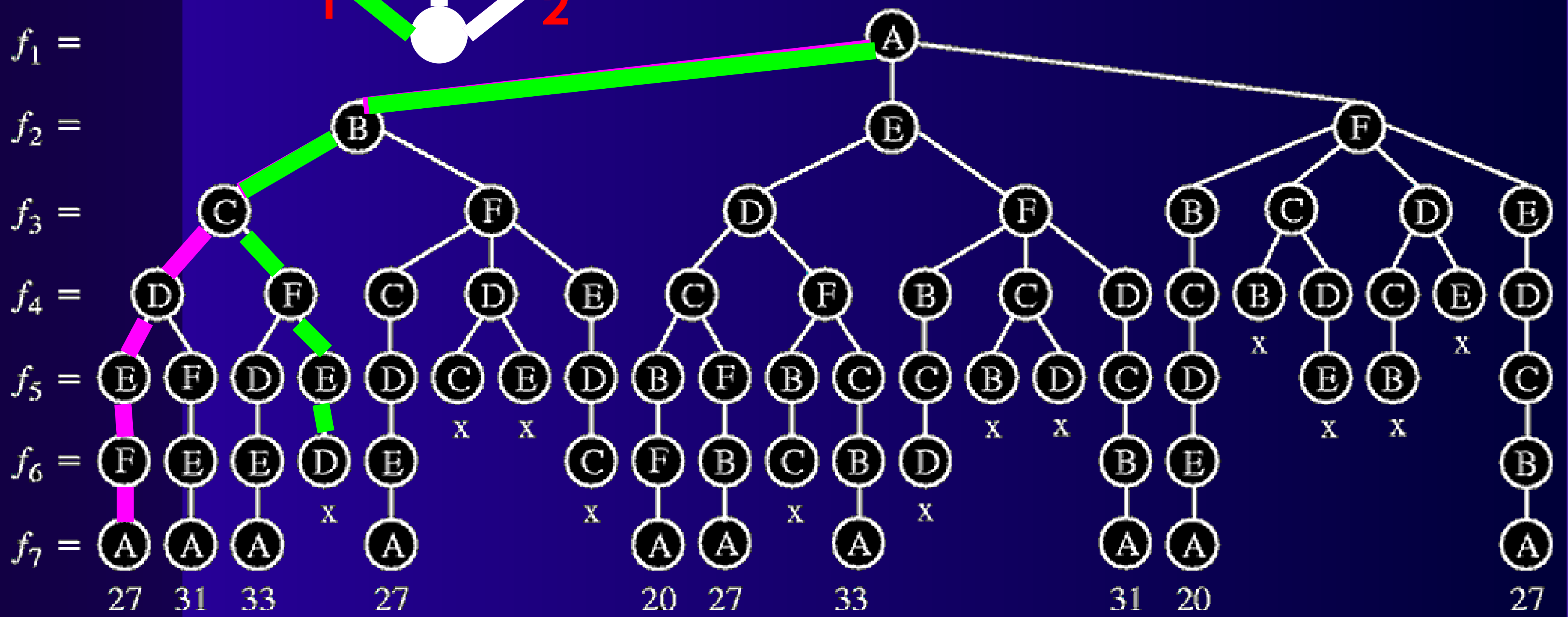
- **Lösung: Folge von Knoten mit**
  - Kanten zwischen benachbarten Elementen
  - Erstes und letztes Element sind gleich
  - Alle anderen Elemente sind unterschiedlich

- **Modell**
  - Folge $f = (f_1, \ldots, f_n)$ mit Knoten als f_i
  - $f_1 = f_n = v$, $f_i \in V \setminus \{v\}$ für $i \notin \{1, n\}$ (explizit)
  - f_{i+1}: $(f_i, f_{i+1}) \in E$ (implizit)
  - $f_i \neq f_j$ für $i \neq j \wedge i,j \notin \{1, n\}$ (implizit)

TSP via Backtracking 2



- Suchbaum
- Jede Lösung zweimal
  - "B immer vor C" **(impl)**



Branch-and-Bound 1

- Teillösung $\underline{f}^{\sim(k)}$
- $D(\underline{f}^{\sim(k)})$: Menge aller Lösungen aus $\underline{f}^{\sim(k)}$
- Abschätzung
  - Gegeben $\underline{f}^{\sim(k)}$
  - Kosten $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ der besten *vollständigen* Lösung in $D(\underline{f}^{\sim(k)})$?
- Verwerfe $\underline{f}^{\sim(k)}$, falls $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ > best_cost
  - Suchbaum wird gestutzt
- Aus Teillösung Endkosten „erraten“
  - Abschätzung!

Branch-and-Bound 2

```
float best_cost;
solution_element cur_sol[n], best_sol;

b_and_b(int k) {
        float new_cost;
        solution_element sol_el;
        if (k = n){
                new_cost := cost(cur_sol);
                if (new_cost < best_cost) {
                        best_cost       := new_cost;
                        best_sol        := copy(cur_sol);
                }
        } elsif (lower_bound_cost(cur_sol, k) >= best_cost)
                        /* tu nix, stutze baum */;
        else foreach (sol_el ∈ allowed(cur_sol, k)) {
                        cur_sol[k] := sol_el;
                        b_and_b(k+1);
                }
}
main {
        best_cost := ∞;
        b_and_b(0);
        report(best_sol);
}
```

Branch-and-Bound 3

- **Effekt der Abschätzung**
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - Zu optimistisch ("ja, es lohnt sich weiterzumachen")
    - Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - Zu pessimistisch ("nein, das bringt nichts mehr")
    - Optimum wird möglicherweise übersehen!
      - Keine exakte Lösung mehr!

➢ **$c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ sollte möglichst genau sein**

  - Darf aber Kosten <u>keinesfalls</u> überschätzen!

- **Wunsch: Schneller als vollständige Suche**

→ Abwägen!

Branch-and-Bound 4

- **Aufbau der Abschätzungsfunktion**

$$\tilde{c}(\tilde{f}^{(k)}) = \tilde{g}(\tilde{f}^{(k)}) + \tilde{h}(\tilde{f}^{(k)})$$

Basiert auf bekannten f_i, $i \leq k$

TSP: Länge des bekannten Pfades

Basiert auf unbekannten f_i, $i > k$

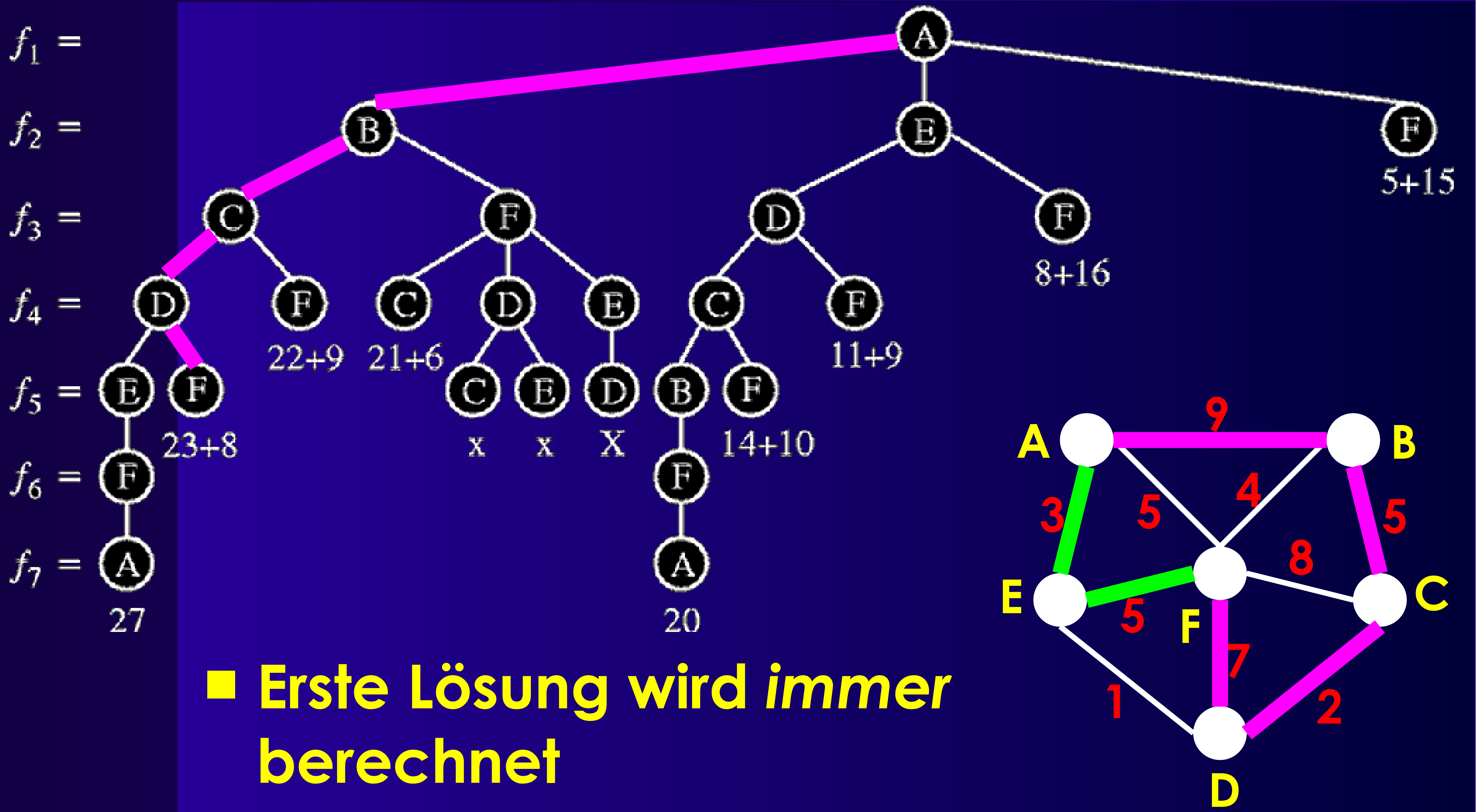
TSP: Verbinde verbliebene Knoten <u>irgendwie</u>

➔ Minimaler überspannender Baum (MST)

Branch-and-Bound 5

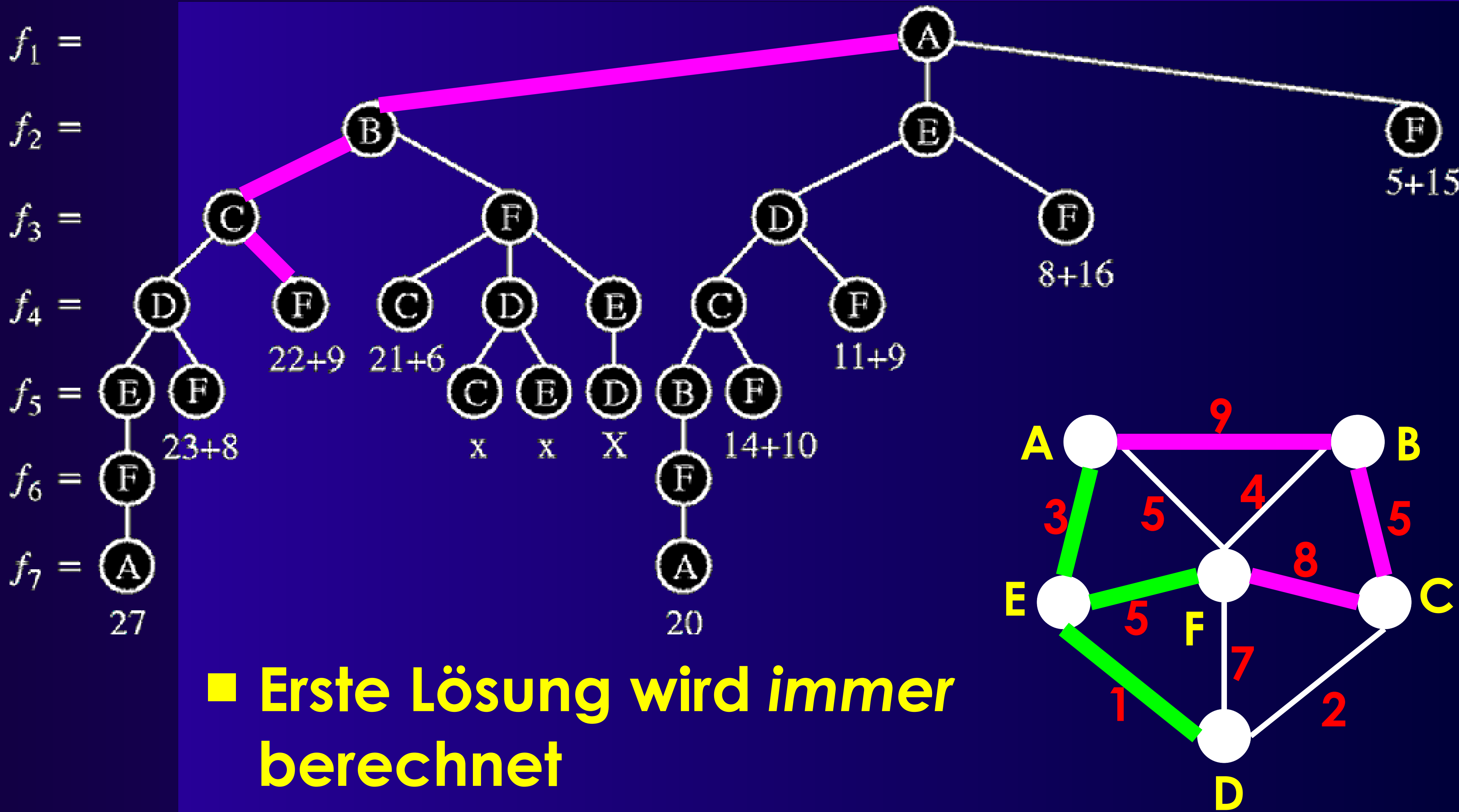
- **MST**
  - Weniger Einschränkungen als TSP
    - Kein Zyklus
    - Kein einfacher Pfad
  - MST immer kürzer oder gleich TSP
    - Optimistische Abschätzung
- **MST läuft in $O(n^2)$: Prims Algorithmus**
  - Besser als NP-vollständig für TSP

TSP via Branch-and-Bound 1



- Erste Lösung wird *immer* berechnet
- Dann „bound“

TSP via Branch-and-Bound 2



- **Erste Lösung wird *immer* berechnet**

Variationen

- Verschiedene Sucharten
  - Welche Teillösung weiter verfeinern?
- Bisher DFS
- Alternative Vorgehensweise
  - BFS
  - Greedy
    - Schnelles Finden einer Lösung
    - Maximales Stutzen

Dynamic Programming 1

- Wiederverwendung von Lösungen
- Prinzip der Optimalität
  - Lösung eines komplexen Problems kann optimal aus den optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammengesetzt werden
- p: Parameter für Problemkomplexität
  - $p = k$: Gesamtproblem
  - $p < k$: Teilproblem
  - $p = 0$ oder $p = 1$: Kleinstes Problem

Dynamic Programming 2

- **Fibonacci-Zahlen: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...**
  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit $F_0=0$, $F_1=1$

```
fib(int n) {
  if (n=0)
    return(0);
  else if (n=1)
    return(1);
  else
    return(fib(n-1)+fib(n-2));
}
```

- $F_n/F_{n+1} \simeq 1{,}6 \Rightarrow F_n > 1{,}6^n$
- Summiere 0 und 1
  $\Rightarrow$ $1{,}6^n$ Schritte

```
int Fib[MAXFIB];

fib(int n) {
   Fib[0] := 0;
   Fib[1] := 1;
   for (i=2; i<=n; ++i)
       Fib[i] := Fib[i-1]+Fib[i-2];
   return(Fib[n]);
}
```

- n Schritte
- Teillösungen bei p = i
- Lösung bei p = n

Dynamic Programming 3

- **Djikstras Kürzester Pfad - Algorithmus**
  - "Finde kürzesten Pfad über die an v_s nahegelegensten k Knoten"
  - ➢ Komplexitätsparameter: $p = k$
  - $p = 0$: $u.dist = w((v_s, u))$ für alle $u \in V$
    - Finde Knoten u mit min. *dist* ← Teillösungen in *dist*
    - Transferiere u von V nach T
    - Aktualisiere *dist* aller Knoten in V
  - p = k+1: Finde Knoten $u \in V$ mit min. *dist*
    - Transferiere u von V *nach* T
    - Aktualisiere *dist* aller Knoten in V

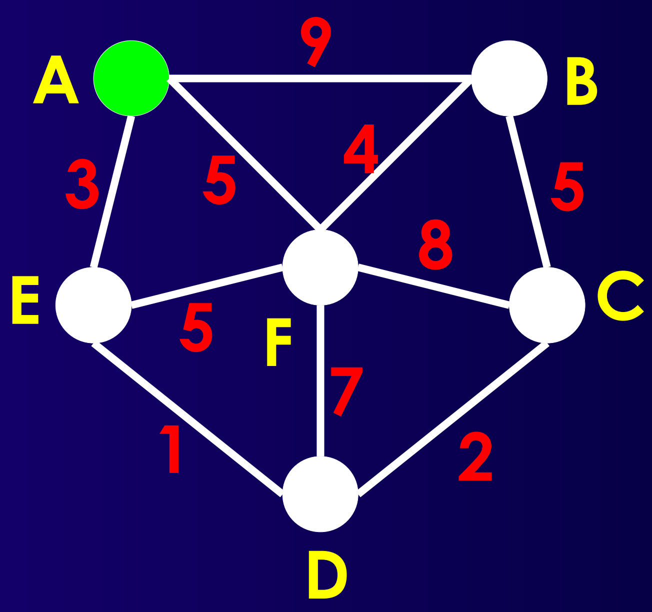
TSP via Dynamic Programming 1

- $G(V,E)$, Kanten gewichtet mit w
- Wähle beliebiges $v_S \in V$
- $p = k$: "finde kürzeste Pfade von v_S zu $v \in V \setminus \{v_S\}$ durch k Zwischenknoten"
- $C(S,v)$: Länge des kürzesten Pfades von v_S nach v durch die Knoten in S
- TSP ist $C(S \setminus \{v_S\}, v_S)$: $p=k+1$

$$C(S,v) = \min_{m \in S} \left[C(S \setminus \{m\}, m) + w((m,v)) \right]$$

TSP via Dynamic Programming 2

- TSP mit $v_S = A$
- $p=0$: $C(\emptyset, v) = w((v_S, v))$ für $(v_S, v) \in E$, sonst ∞
  - $C(\emptyset, B) = 9$
  - $C(\emptyset, C) = \infty$
  - $C(\emptyset, D) = \infty$
  - $C(\emptyset, E) = 3$
  - $C(\emptyset, F) = 5$



TSP via Dynamic Programming 3

- **Zwischenergebnisse für $p = 0$**
  - $C(\emptyset, B) = 9$, $C(\emptyset, C) = \infty$, $C(\emptyset, D) = \infty$, $C(\emptyset, E) = \infty$, $C(\emptyset, F) = 5$
- **$p=1$: Berechne alle Kombinationen von $|S|=1$ und v (5 x 4 Mögl.). Auszug:**
  - $C(\{B\}, C) = C(\emptyset, B) + w((B, C)) = 9 + 5 = 14$
  - $C(\{B\}, F) = C(\emptyset, B) + w((B, F)) = 9 + 4 = 13$
  - $C(\{F\}, B) = C(\emptyset, F) + w((F, B)) = 5 + 4 = 9$
  - ...
- **min entfällt bei $|S|=1$ (nur ein Element!)**

TSP via Dynamic Programming 4

- **Einige Zwischenergebnisse für p=1:**
  - $C(\{B\}, F)=13$, $C(\{F\}, B)=9$
- ***p=|S|=2: {5x4}x3 Möglichkeiten, Auszug:***

$$C(\{B,F\},C)=$$

$$\min\left[C(\{B\},F)+w((F,C)),\ C(\{F\},B)+w((B,C))\right]$$

13 + 8 9 + 5

→ $C(\{B,F\},C)=14$

TSP via Dynamic Programming 5

- **Ein Zwischenergebnis für *p*=2:**
  - *C({B, F}, C) = 14*
  - "Kürzester Pfad von *A* nach C über *{B, F}* hat Länge 14"
- **Ad nauseam bis *p*=|*S*|=*n*-*1***
  - *C({B, C, D, E, F}, A) = 20*
  - *"Kürzester Pfad von A nach A über {B, C, D, E, F} hat Länge 20"*

  → TSP
- **Immer noch NP-hart: 2^n Untermengen**
  - Untersuche aber nur optimale Teillösungen

Lineare Programmierung 1

- Mathematische Modelle als Grundlage
- Beispiel: Optimiere auf max. Umsatz

	Preis	Rohstoff A	Rohstoff B
Produkt 1	550	42	23
Produkt 2	250	14	53
Liefermenge		100	200

- Modell: x_1 Produkt 1, x_2 Produkt 2

$$\max : 550\,x_1 + 250\,x_2$$

$$42\,x_1 + 14\,x_2 \leq 100$$

$$23\,x_1 + 53\,x_2 \leq 200$$

Lineare Programmierung 2

- Lösbar in P
  - Ellipsoid Verfahren (1979)
- Praktisch schneller sind Verfahren in NP
  - Simplex (1947)
- Theoretisch besser (auch in P)
  - Interior Point, projective method (1984)
- Lösung durch "LP Solver"
  - lp_solve, GPLK (public domain)
  - CPLEX (kommerziell)
- Beispiel: x_1=1,31303, x_2=3,20378
  - Umsatz 1523,11

Integer LP 1

- Problem
  - Häufig nur ganzzahlige Variablen erlaubt

➢ Integer Lineare Programmierung (ILP)

- Lösungsmethoden komplizierter
  - Rundung *nicht* sinnvoll
    - Sub-optimal
      - Beispiel $x_1' = 1$, $x_2' = 3$: Gewinn 1300
    - Ungültige Werte

- Beispiel: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, Gewinn 1350

→ Lösungsverfahren jetzt NP-vollständig

Integer LP 2

- Häufig weitere Einschränkung
  - Variablen nur 0 oder 1
  - ➢ 0-1 ILP
- Lösungsverfahren
  - LP kombiniert mit branch-and-bound
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem), nur bei 0-1

TSP via 0-1 ILP - 1

- Pro Kante $e_i \in E$ ein x_i, $1 \leq i \leq |E| = k$
  - $x_i = 1$ wenn x_i im optimalen Zyklus, 0 sonst
  - Entscheidungsvariablen
  - Zykluslänge (Gewicht)

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{w}(e_i)\, x_i$$

- **Zyklus (I)**
  - **An jedem Knoten müssen zwei Kanten selektiert werden**

$$v_1: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

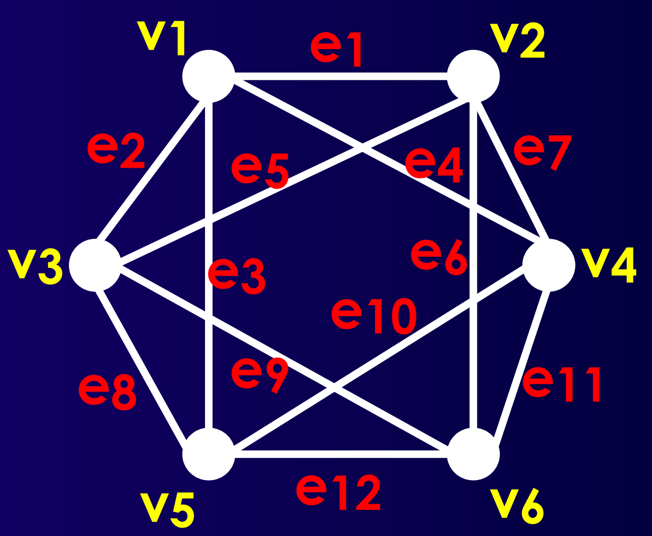
$$v_2: x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

$$v_3: x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

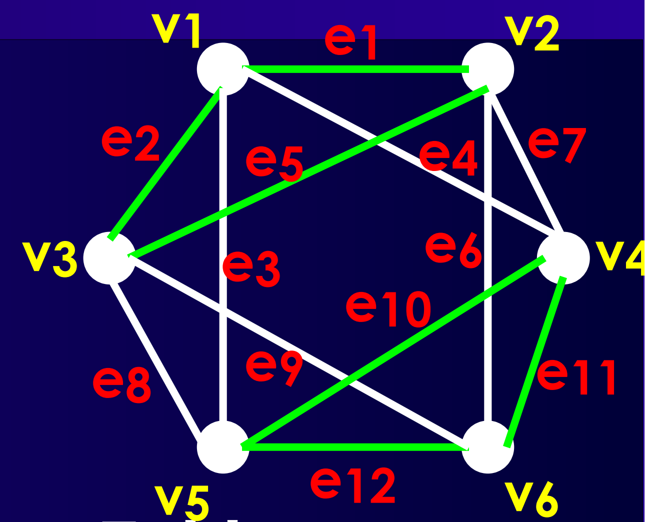
$$v_4: x_4 + x_7 + x_{10} + x_{11} = 2$$

$$v_5: x_3 + x_8 + x_{10} + x_{12} = 2$$

$$v_6: x_6 + x_9 + x_{11} + x_{12} = 2$$



TSP via 0-1 ILP - 3



- **Zyklus (II)**
  - Vermeide unverbundene Zyklen
  - Kleinster Zyklus: 3 Knoten
    - Da 2 Kanten pro Knoten
  - Bestimme alle unverbundenen Zyklen
  - Fordere Verbindungen dazwischen

$$\{v_{1,} v_{2,} v_3\} + \{v_{4,} v_{5,} v_6\} : x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 2$$

$$\{v_{1,} v_{3,} v_5\} + \{v_{2,} v_{4,} v_6\} : x_1 + x_4 + x_5 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 2$$

$$\{v_{1,} v_{2,} v_4\} + \{v_{3,} v_{5,} v_6\} : x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_{10} + x_{11} \geq 2$$

$$\{v_{1,} v_{4,} v_5\} + \{v_{3,} v_{2,} v_6\} : x_1 + x_7 + x_{11} + x_{12} + x_8 + x_2 \geq 2$$

(I) Lineare Programmierung

- **Modelle werden i.d.R. generiert**
  - Spezielle Sprachen: z.B. AMPL, GNU MathProg
  - Mittels konventioneller Programme
  - Textdatei
  - API in eingebundene Bibliothek
- **I(LP) Parameter**
  - Anzahl Variablen
  - Anzahl Bedingungen
- **Mixed ILP: LP und ILP**
- **Non-Linear Programming (NLP)**

Vorbereitung

- Nächste Vorlesung: Dienstag
- Kapitel 9 bis einschließlich 9.3
  - Verdrahtung

Zusammenfassung

- Exakte Lösungsverfahren
- Backtracking
  - Erschöpfende Suche
- Branch-and-Bound
  - Stutzen des Suchbaumes
- Dynamic Programming
  - Wiederverwendung von Teillösungen
- (Integer) Lineare Programmierung
  - Mathematische Modelle