

Exakte Optimierungsverfahren

Andreas Koch
FG Eingebettete Systeme
und ihre Anwendungen
TU Darmstadt

Organisatorisches

- Anmeldung zur Prüfung
 - Auch im klausurlosen 5 SWS-Modus!
- Im 2 SWS-Modus mündlich
 - Mi 30.03.2011
 - Je 30 Minuten
 - Beginn 15:00 Uhr
 - Zeitslots werden nächste Woche vergeben

- Probleme im VLSI CAD-Bereich
 - Am Beispiel: Travelling Salesman (TSP)

- Exakte Verfahren
 - Backtracking
 - Branch-and-Bound
 - Dynamic Programming
 - Integer Linear Programming

- Zusammenfassung

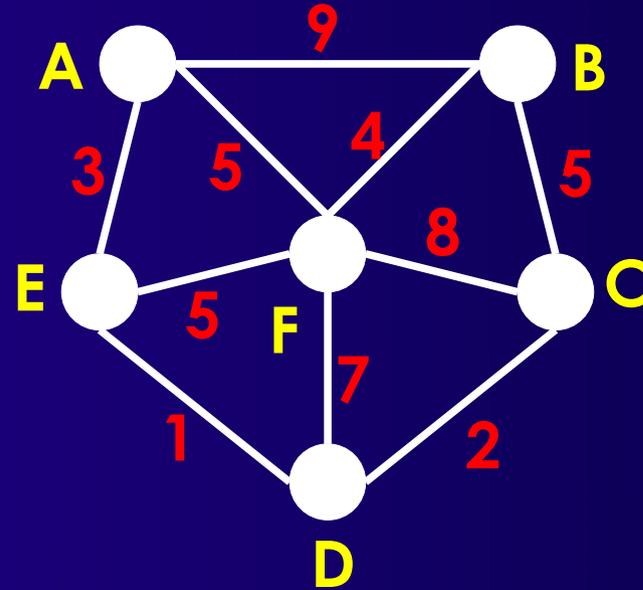
Art der Probleme

- Viele Probleme im Bereich VLSI CAD sind
 - NP-vollständig
 - NP-hart
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls sub-optimale Lösungen akzeptabel
 - Näherungsverfahren
 - ◆ Garantieren eine vorgegebene Lösungsqualität
 - Heuristiken
 - ◆ Schwankende Lösungsqualität

Exakte Lösungsverfahren

- Erschöpfende Suche
 - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
 - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung "schlechter" Ansätze
 - Abschätzung aus Teillösung
 - Beispiel: Branch-and-Bound
- Wiederverwendung alter Ergebnisse
 - Beispiel: Dynamic Programming
- Mathematisches Modell
 - Beispiel: (Integer) Linear Programming

Travelling Salesman Problem



- TSP
- *Einfacher* Zyklus durch alle Knoten mit minimaler Länge
 - Jeder Knoten nur einmal besucht
 - Minimale Kantengewichte
- NP-vollständig

■ Instanz $I = (F, c)$

- Lösungsraum F
- Kostenfunktion $c: F \rightarrow \mathbb{R}$

■ Lösung $\underline{f} \in F: \underline{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$

- Explizite Einschränkungen: Wertebereiche f_i
- Implizite Einschränkungen: Abhängigkeiten

■ Teillösung \underline{f}^{\sim}

- Einige f_i undefiniert
- Spannt Unterraum von F auf

Backtracking 1

- Systematisch durch ganzen Lösungsraum
- Beginne mit komplett undefinierter Teillösung, $k = 0$
- Weise f_k einen möglichen Wert zu
- Gehe zu nächstem f_k : $k = k + 1$
- Solange, bis
 - Komplette Lösung ($k = n$), neue beste Lösung?
 - oder implizite Einschränkungen greifen
- Zurück zu letztem änderbarem f_k

Backtracking 2

```
float best_cost;
solution_element cur_sol[n], best_sol[n];

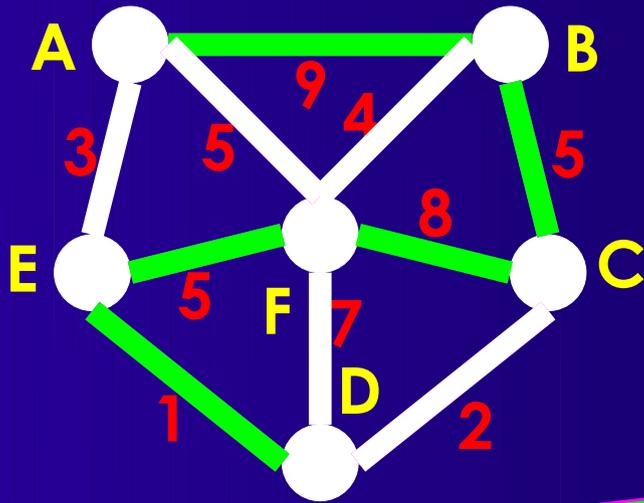
backtrack(int k) {
    float new_cost;
    solution_element sol_el;
    if (k = n){
        new_cost := cost(cur_sol);
        if (new_cost < best_cost) {
            best_cost      := new_cost;
            best_sol       := copy(cur_sol);
        }
    } else
        foreach (sol_el ∈ allowed(cur_sol, k)) {
            cur_sol[k] := sol_el;
            backtrack(k+1);
        }
}

main {
    best_cost := ∞;
    backtrack(0);
    report(best_sol);
}
```

TSP via Backtracking 1

- Lösung: Folge von Knoten mit
 - Kanten zwischen benachbarten Elementen
 - Erstes und letztes Element sind gleich
 - Alle anderen Elemente sind unterschiedlich
- Modell
 - Folge $f = (f_1, \dots, f_n)$ mit Knoten als f_i
 - $f_1 = f_n = v, f_i \in V \setminus \{v\}$ für $i \notin \{1, n\}$ (explizit)
 - $f_{i+1}: (f_i, f_{i+1}) \in E$ (implizit)
 - $f_i \neq f_j$ für $i \neq j \wedge i, j \notin \{1, n\}$ (implizit)

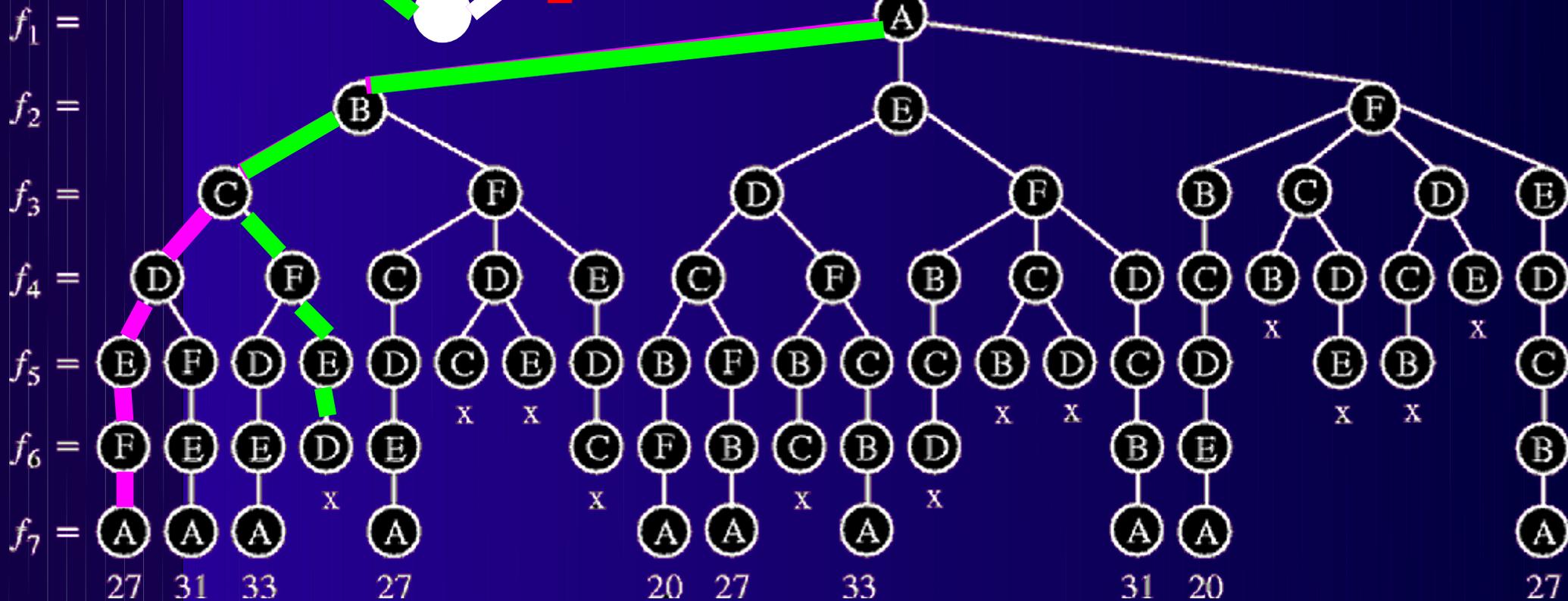
TSP via Backtracking 2



■ Suchbaum

■ Jede Lösung zweimal

• "B immer vor C" (impl)



Branch-and-Bound 1

- Teillösung $\underline{f}^{\sim(k)}$
- $D(\underline{f}^{\sim(k)})$: Menge aus $\underline{f}^{\sim(k)}$ herleitbarer Lsgen.
- Abschätzung
 - Gegeben $\underline{f}^{\sim(k)}$
 - Kosten $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ der besten vollständigen Lösung in $D(\underline{f}^{\sim(k)})$?
- Verwerfe $\underline{f}^{\sim(k)}$, falls $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)}) > \text{best_cost}$
 - Suchbaum wird gestutzt
- Aus Teillösung Endkosten „erraten“
 - Abschätzung!

Branch-and-Bound 2

```
float best_cost;
solution_element cur_sol[n], best_sol;

b_and_b(int k) {
    float new_cost;
    solution_element sol_el;
    if (k == n) {
        new_cost := cost(cur_sol);
        if (new_cost < best_cost) {
            best_cost := new_cost;
            best_sol := copy(cur_sol);
        }
    } else if (lower_bound_cost(cur_sol, k) >= best_cost)
        /* tu nix, stütze baum */;
    else foreach (sol_el ∈ allowed(cur_sol, k)) {
        cur_sol[k] := sol_el;
        b_and_b(k+1);
    }
}

main {
    best_cost := ∞;
    b_and_b(0);
    report(best_sol);
}
```

Branch-and-Bound 3

■ Effekt der Abschätzung

- Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
 - ◆ Zu optimistisch ("ja, es lohnt sich weiterzumachen")
 - ◆ Überflüssige Schritte
- Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
 - ◆ Zu pessimistisch ("nein, das bringt nichts mehr")
 - ◆ Optimum wird möglicherweise übersehen!
 - ❖ Keine exakte Lösung mehr!

➤ $c^{\sim}(f^{\sim}(k))$ sollte möglichst genau sein

- Darf aber Kosten keinesfalls überschätzen!

■ Wunsch: Schneller als vollständige Suche
→ Abwägen!

Branch-and-Bound 4

- Aufbau der Abschätzungsfunktion

$$\tilde{c}(\tilde{f}^{(k)}) = \tilde{g}(\tilde{f}^{(k)}) + \tilde{h}(\tilde{f}^{(k)})$$

Basiert auf bekannten $f_i, i \leq k$

TSP: Länge des bekannten Pfades

Basiert auf unbekanntem $f_i, i > k$

TSP: Verbinde verbliebene Knoten irgendwie

→ **Minimaler überspannender Baum (MST)**

Branch-and-Bound 5

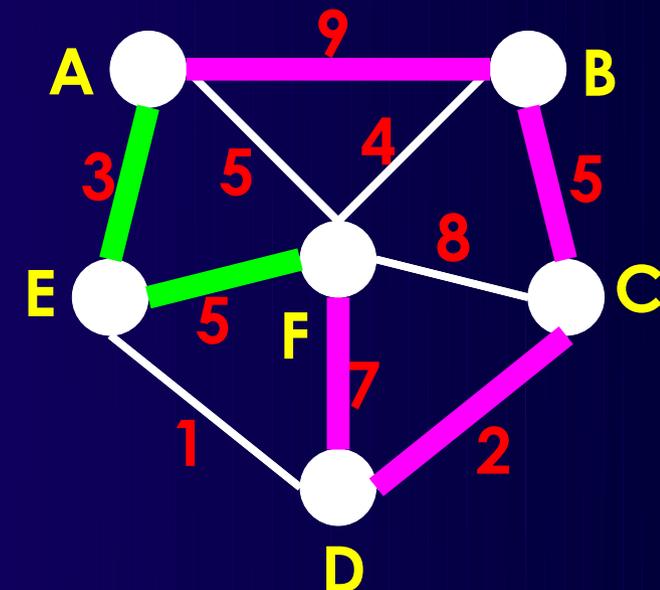
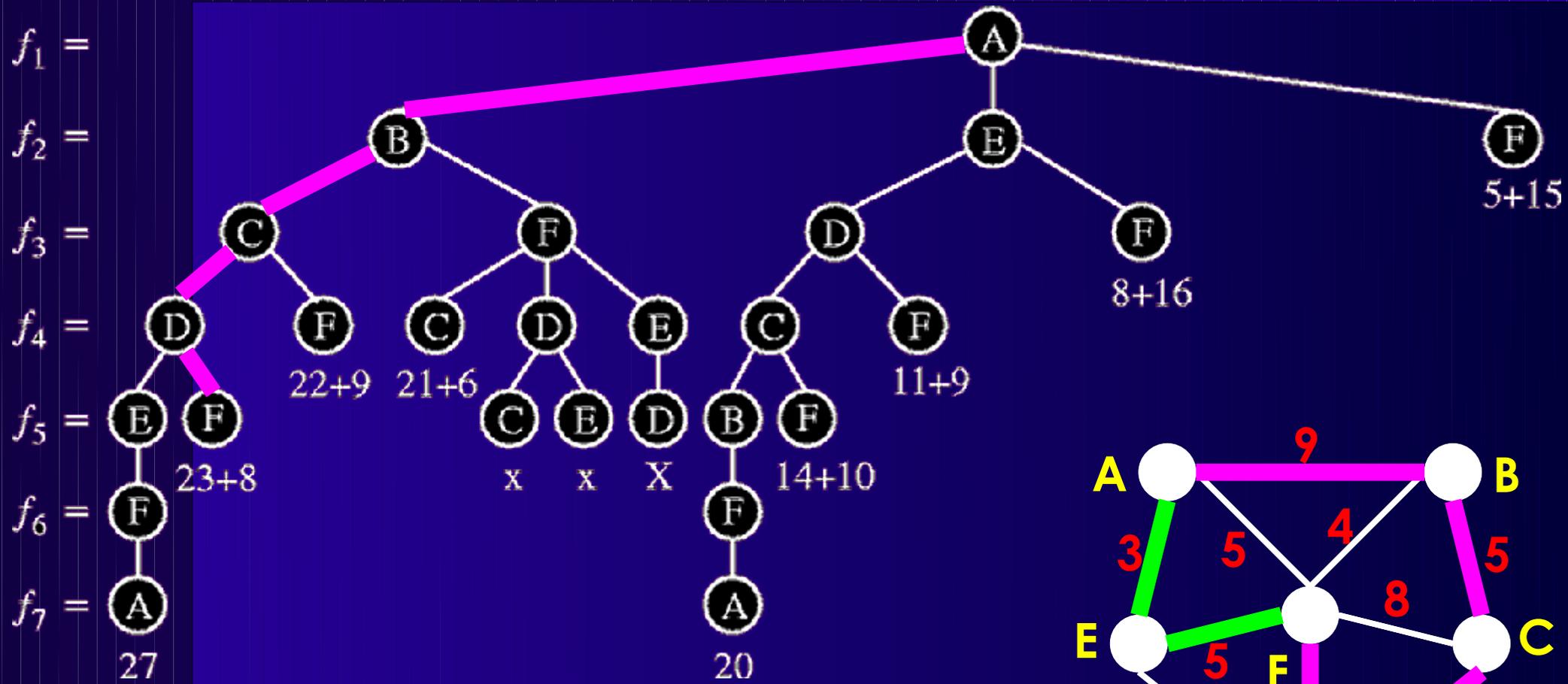
■ MST

- Weniger Einschränkungen als TSP
 - ◆ Kein Zyklus
 - ◆ Kein einfacher Pfad
- MST immer kürzer oder gleich TSP
 - ◆ Optimistische Abschätzung

■ MST läuft in $O(n^2)$: Prim's Algorithmus

- Besser als NP-vollständig für TSP

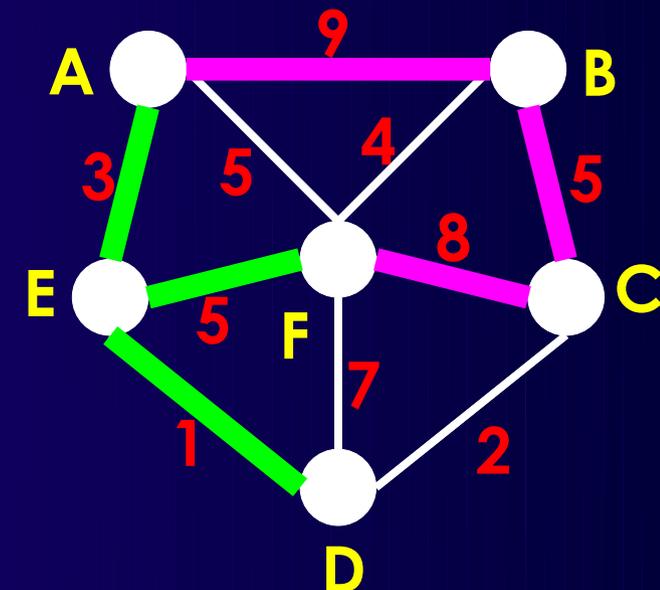
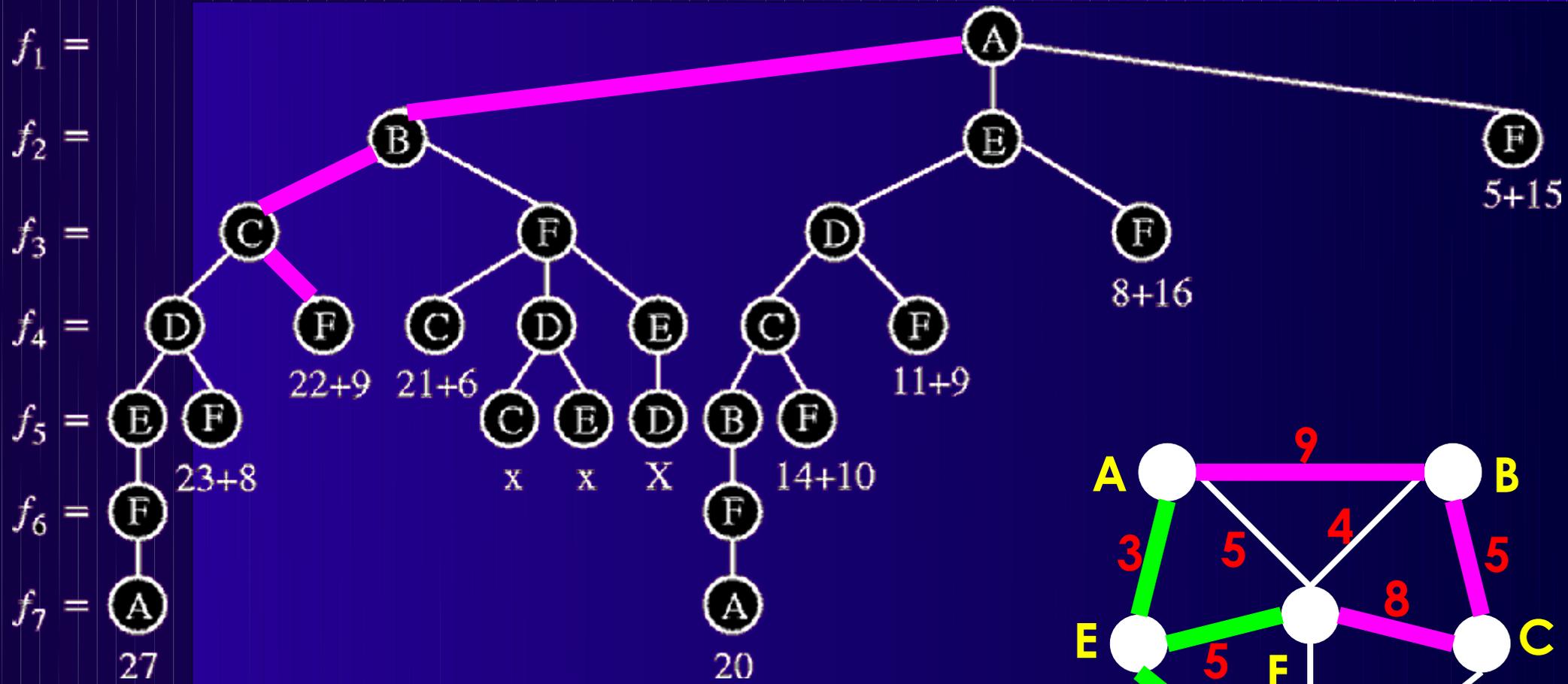
TSP via Branch-and-Bound 1



- Erste Lösung wird *immer* berechnet
- Dann „bound“

Exakte Optimierungsverfahren

TSP via Branch-and-Bound 2



■ Erste Lösung wird *immer* berechnet

- **Verschiedene Sucharten**
 - Welche Teillösung weiter verfeinern?
- **Bisher DFS**
- **Alternative Vorgehensweise**
 - BFS
 - Greedy
 - ◆ Schnelles Finden einer Lösung
 - ◆ Maximales Stutzen

Dynamic Programming 1

- Wiederverwendung von Lösungen
- Prinzip der Optimalität
 - Annahme:
Lösung eines komplexen Problems kann optimal aus den optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammengesetzt werden
 - Gilt aber nicht für alle Probleme!
- p : Parameter für Problemkomplexität
 - $p = k$: Gesamtproblem
 - $p < k$: Teilproblem
 - $p = 0$ oder $p = 1$: Kleinstes Problem

Dynamic Programming 2

- Fibonacci-Zahlen: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...
 - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit $F_0=0, F_1=1$

```
fib(int n) {  
    if (n=0)  
        return(0);  
    else if (n=1)  
        return(1);  
    else  
        return(fib(n-1)+fib(n-2));  
}
```

- $F_n/F_{n+1} \simeq 1,6 \Rightarrow F_n > 1,6^n$
- Summiere 0 und 1
 $\Rightarrow 1,6^n$ Schritte

```
int Fib[MAXFIB];
```

```
fib(int n) {  
    Fib[0] := 0;  
    Fib[1] := 1;  
    for (i=2; i<=n; ++i)  
        Fib[i] := Fib[i-1]+Fib[i-2];  
    return(Fib[n]);  
}
```

- n Schritte
- Teillösungen bei $p = i$
- Lösung bei $p = n$

Dynamic Programming 3

■ Dijkstras Kürzester Pfad - Algorithmus

- "Finde kürzesten Pfad über die an v_s nahegelegensten k Knoten"

➤ Komplexitätsparameter: $p = k$

- $p = 0$: $u.dist = w((v_s, u))$ für alle $u \in V$

- ◆ Finde Knoten u mit min. $dist$

← Teillösungen in $dist$

- ◆ Transferiere u von V nach T

- ◆ Aktualisiere $dist$ aller Knoten in V

- $p = k+1$: Finde Knoten $u \in V$ mit min. $dist$

- ◆ Transferiere u von V nach T

- ◆ Aktualisiere $dist$ aller Knoten in V

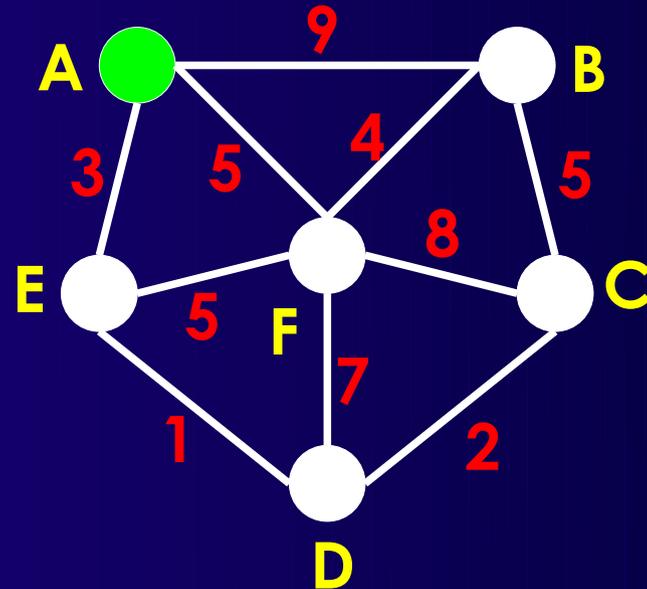
TSP via Dynamic Programming 1

- $G(V,E)$, Kanten gewichtet mit w
- Wähle beliebiges $v_s \in V$
- $p = k$: "finde kürzeste Pfade von v_s zu $v \in V \setminus \{v_s\}$ durch k Zwischenknoten"
- $C(S,v)$: Länge des kürzesten Pfades von v_s nach v durch die Knoten in S
- TSP ist $C(S \setminus \{v_s\}, v_s)$: $p=k+1$

$$C(S, v) = \min_{m \in S} [C(S \setminus \{m\}, m) + w((m, v))]$$

TSP via Dynamic Programming 2

- TSP mit $v_s=A$
- $p=0$: $C(\emptyset, v) = w((v_s, v))$ für $(v_s, v) \in E$,
sonst ∞
 - $C(\emptyset, B) = 9$
 - $C(\emptyset, C) = \infty$
 - $C(\emptyset, D) = \infty$
 - $C(\emptyset, E) = 3$
 - $C(\emptyset, F) = 5$



TSP via Dynamic Programming 3

■ Zwischenergebnisse für $p = 0$

- $C(\emptyset, B) = 9, C(\emptyset, C) = \infty, C(\emptyset, D) = \infty,$
 $C(\emptyset, E) = \infty, C(\emptyset, F) = 5$

■ $p=1$: Berechne alle Kombinationen von $|S|=1$ und v (5 x 4 Möglichk.). Auszug:

- $C(\{B\}, C) = C(\emptyset, B) + w((B, C)) = 9 + 5 = 14$
- $C(\{B\}, F) = C(\emptyset, B) + w((B, F)) = 9 + 4 = 13$
- $C(\{F\}, B) = C(\emptyset, F) + w((F, B)) = 5 + 4 = 9$
- ...

■ min entfällt bei $|S|=1$ (nur ein Element!)

TSP via Dynamic Programming 4

- Einige Zwischenergebnisse für $p=1$:

- $C(\{B\}, F) = 13, C(\{F\}, B) = 9$

- $p = |S| = 2$: $\{5 \times 4\} \times 3$ Möglichkeiten,
Auszug:

$$C(\{B, F\}, C) =$$

$$\min [C(\{B\}, F) + w((F, C)), C(\{F\}, B) + w((B, C))]$$

$$13 + 8$$

$$9 + 5$$

$$\rightarrow C(\{B, F\}, C) = 14$$

TSP via Dynamic Programming 5

- Ein Zwischenergebnis für $p=2$:
 - $C(\{B, F\}, C) = 14$
 - "Kürzester Pfad von A nach C über $\{B, F\}$ hat Länge 14"
 - Ad nauseam bis $p=|S|=n-1$
 - $C(\{B, C, D, E, F\}, A) = 20$
 - "Kürzester Pfad von A nach A über $\{B, C, D, E, F\}$ hat Länge 20"
- TSP
- Immer noch NP-hart: 2^n Untermengen
 - Untersuche aber nur optimale Teillösungen

Lineare Programmierung 1

- Mathematische Modelle als Grundlage
- Beispiel: Optimiere auf max. Umsatz

	Preis	Rohstoff A	Rohstoff B
Produkt 1	550	42	23
Produkt 2	250	14	53
Liefermenge		100	200

- Modell: x_1 Produkt 1, x_2 Produkt 2

$$\max : 550 x_1 + 250 x_2$$

$$42 x_1 + 14 x_2 \leq 100$$

$$23 x_1 + 53 x_2 \leq 200$$

Lineare Programmierung 2

- Lösbar in P
 - Ellipsoid Verfahren (1979)
- Praktisch schneller sind Verfahren in NP
 - Simplex (1947)
- Theoretisch besser (auch in P)
 - Interior Point, projective method (1984)
- Lösung durch "LP Solver"
 - Ip_solve, GLPK, CLP (public domain)
 - CPLEX (kommerziell, aber viel schneller!)
- Beispiel: $x_1=1,31303$, $x_2=3,20378$
 - Umsatz 1523,11

■ Problem

- Häufig nur ganzzahlige Variablen erlaubt

➤ Integer Lineare Programmierung (ILP)

■ Lösungsmethoden komplizierter

- Rundung *nicht* sinnvoll
 - ◆ Sub-optimal
 - ❖ Beispiel $x_1' = 1, x_2' = 3$: Gewinn 1300
 - ◆ Ungültige Werte

■ Beispiel: $x_1 = 2, x_2 = 1$, Gewinn 1350

➔ Lösungsverfahren jetzt NP-vollständig

- Häufig weitere Einschränkung
 - Variablen nur 0 oder 1
 - 0-1 ILP
- Lösungsverfahren
 - LP kombiniert mit branch-and-bound
 - SAT (Erfüllbarkeitsproblem), nur bei 0-1

TSP via 0-1 ILP - 1

■ Pro Kante $e_i \in E$ ein x_i , $1 \leq i \leq |E| = k$

- $x_i = 1$ wenn x_i im optimalen Zyklus, =0 sonst
- Entscheidungsvariablen
- Zykluslänge (Gewicht)

$$\sum_{i=1}^k w(e_i) x_i$$

■ Zyklus (I)

- An jedem Knoten müssen zwei Kanten selektiert werden

$$v_1: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

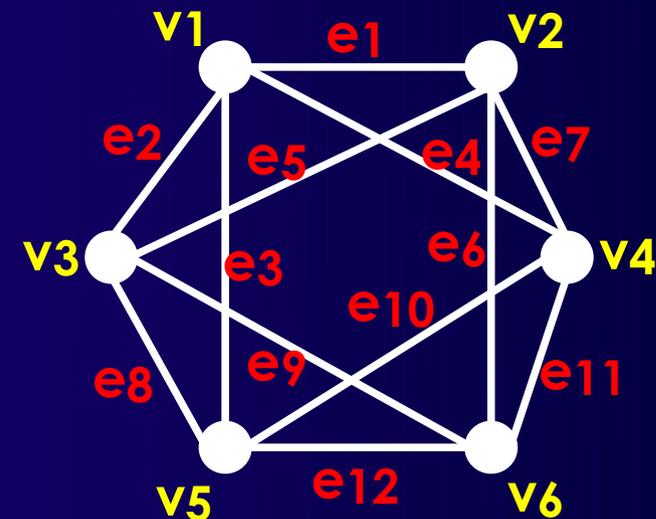
$$v_2: x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

$$v_3: x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

$$v_4: x_4 + x_7 + x_{10} + x_{11} = 2$$

$$v_5: x_3 + x_8 + x_{10} + x_{12} = 2$$

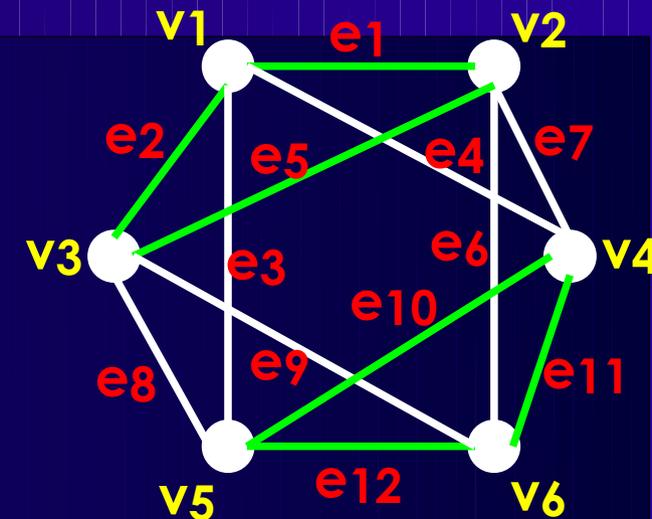
$$v_6: x_6 + x_9 + x_{11} + x_{12} = 2$$



TSP via 0-1 ILP - 3

■ Zyklus (II)

- Vermeide unverbundene Zyklen
- Kleinster Zyklus: 3 Knoten
 - ◆ Da 2 Kanten pro Knoten
- Bestimme alle unverbundenen Zyklen
- Fordere Verbindungen dazwischen



$$\{v_1, v_2, v_3\} + \{v_4, v_5, v_6\} : x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 2$$

$$\{v_1, v_3, v_5\} + \{v_2, v_4, v_6\} : x_1 + x_4 + x_5 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 2$$

$$\{v_1, v_2, v_4\} + \{v_3, v_5, v_6\} : x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_{10} + x_{11} \geq 2$$

$$\{v_1, v_4, v_5\} + \{v_3, v_2, v_6\} : x_1 + x_7 + x_{11} + x_{12} + x_8 + x_2 \geq 2$$

(I) Lineare Programmierung

- Modelle werden i.d.R. generiert
 - Spezielle Sprachen: z.B. AMPL, GNU MathProg
 - Mittels konventioneller Programme
 - Textdatei
 - API in eingebundene Bibliothek
- I(LP) Parameter
 - Anzahl Variablen
 - Anzahl Bedingungen
- Mixed ILP: LP und ILP
- Non-Linear Programming (NLP)

- Kapitel 9 bis einschließlich 9.3
 - Verdrahtung

Zusammenfassung

- Exakte Lösungsverfahren
- Backtracking
 - Erschöpfende Suche
- Branch-and-Bound
 - Stutzen des Suchbaumes
- Dynamic Programming
 - Wiederverwendung von Teillösungen
- (Integer) Lineare Programmierung
 - Mathematische Modelle