# Algorithmen im Chip-Entwurf 6

## Exakte Optimierungsverfahren

Andreas Koch
FG Eingebettete Systeme
und ihre Anwendungen
TU Darmstadt

# Organisatorisches

- Anmeldung zur Prüfung
  - <u>Auch</u> im klausurlosen 5 SWS-Modus!
- Im 2 SWS-Modus mündlich
  - Mi 30.03.2011
  - Je 30 Minuten
  - Beginn 15:00 Uhr
  - Zeitslots werden nächste Woche vergeben

# Überblick

- Probleme im VLSI CAD-Bereich
  - Am Beispiel: Travelling Salesman (TSP)
- Exakte Verfahren
  - Backtracking
  - Branch-and-Bound
  - Dynamic Programming
  - Integer Linear Programming
- Zusammenfassung

# Art der Probleme

- Viele Probleme im Bereich VLSI CAD sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart

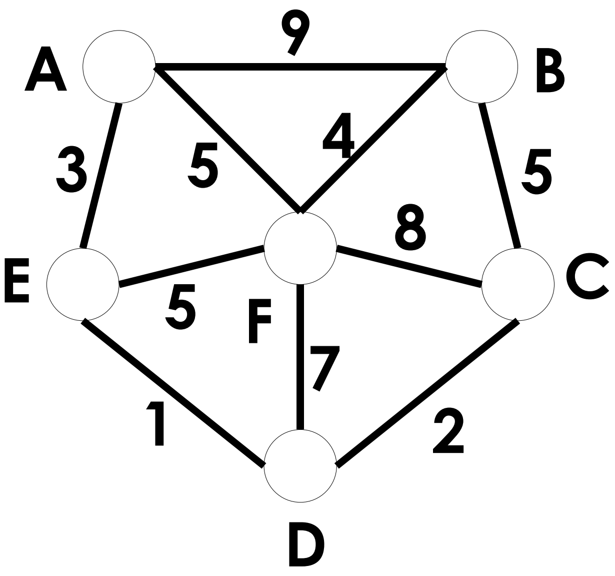
➔ Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen

- Falls sub-optimale Lösungen akzeptabel
  - Näherungsverfahren
    - Garantieren eine vorgegebene Lösungsqualität
  - Heuristiken
    - Schwankende Lösungsqualität

# Exakte Lösungsverfahren

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung "schlechter" Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound
- Wiederverwendung alter Ergebnisse
  - Beispiel: Dynamic Programming
- Mathematisches Modell
  - Beispiel: (Integer) Linear Programming

# Travelling Salesman Problem




- TSP
- *Einfacher* Zyklus durch alle Knoten mit minimaler Länge
  - Jeder Knoten nur einmal besucht
  - Minimale Kantengewichte
- NP-vollständig

# Definitionen

- Instanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum $F$
  - Kostenfunktion $c: F \to \mathbb{R}$
- Lösung $\underline{\boldsymbol{f}} \in F$: $\underline{\boldsymbol{f}} = [\, f_1, \ldots, f_n]^T$
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche $f_i$
  - Implizite Einschränkungen: Abhängigkeiten
- Teillösung $\underline{f}^{\sim}$
  - Einige $f_i$ undefiniert
  - Spannt Unterraum von $F$ auf

# Backtracking 1

- Systematisch durch ganzen Lösungsraum
- Beginne mit komplett undefinierter Teillösung, $k = 0$
- Weise $f_k$ einen möglichen Wert zu
- Gehe zu nächstem $f_k$: $k = k + 1$
- Solange, bis
  - Komplette Lösung ($k = n$), neue beste Lösung?
  - oder implizite Einschränkungen greifen
- Zurück zu letztem änderbarem $f_k$

# Backtracking 2

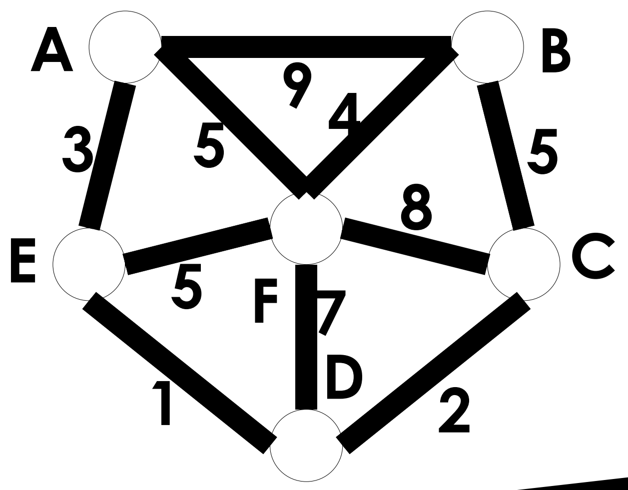
```
float best_cost;
solution_element cur_sol[n], best_sol[n];

backtrack(int k) {
        float new_cost;
        solution_element sol_el;
        if (k = n){
                new_cost := cost(cur_sol);
                if (new_cost < best_cost) {
                        best_cost       := new_cost;
                        best_sol        := copy(cur_sol);
                }
        } else
                foreach (sol_el ∈ allowed(cur_sol, k)) {
                        cur_sol[k] := sol_el;
                        backtrack(k+1);
                }
}
main {
        best_cost := ∞;
        backtrack(0);
        report(best_sol);
}
```

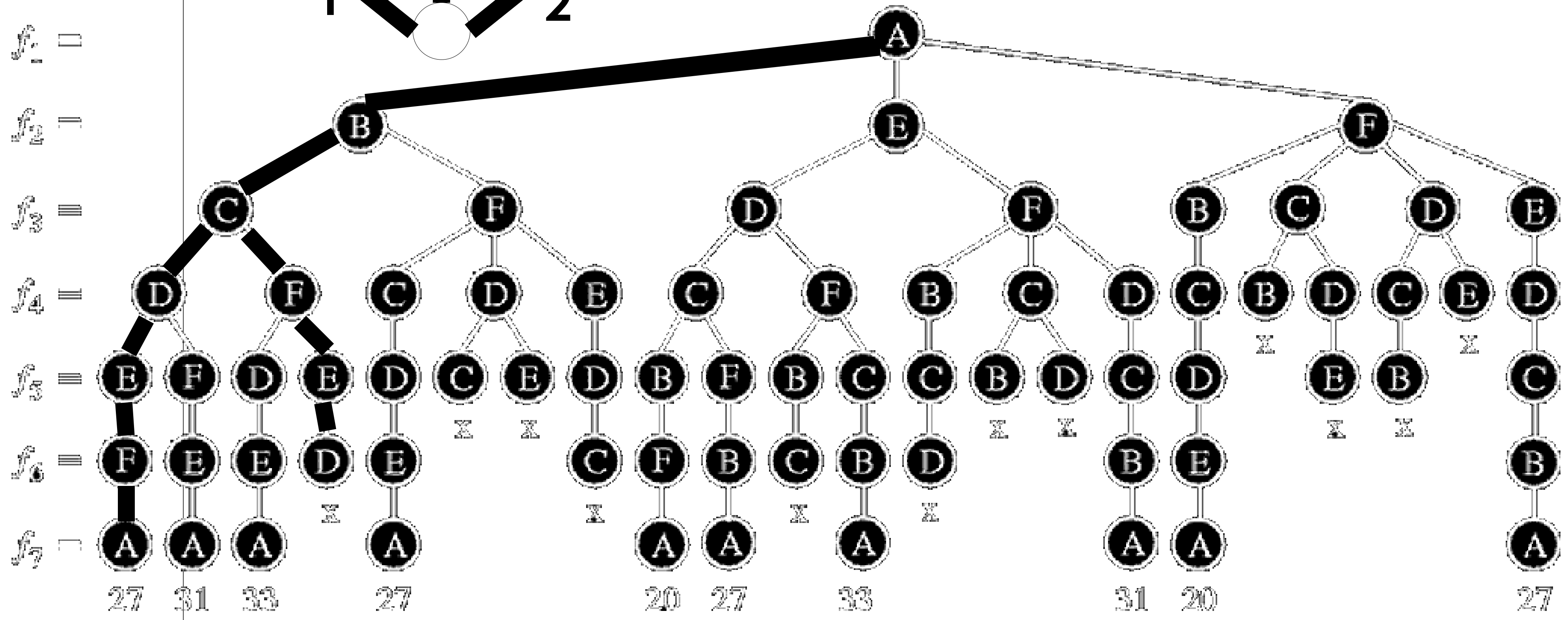
# TSP via Backtracking 1

- Lösung: Folge von Knoten mit
  - Kanten zwischen benachbarten Elementen
  - Erstes und letztes Element sind gleich
  - Alle anderen Elemente sind unterschiedlich
- Modell
  - Folge $f = (f_1, \ldots, f_n)$ mit Knoten als $f_i$
  - $f_1 = f_n = v$, $f_i \in V \setminus \{v\}$ für $i \notin \{1, n\}$ (explizit)
  - $f_{i+1}$: $(f_i, f_{i+1}) \in E$ (implizit)
  - $f_i \neq f_j$ für $i \neq j \wedge i,j \notin \{1, n\}$ (implizit)

# TSP via Backtracking 2




- Suchbaum
- Jede Lösung zweimal
  - "B immer vor C" (impl)



# Branch-and-Bound 1

- Teillösung $\underline{f}^{\sim(k)}$
- $D(\underline{f}^{\sim(k)})$: Menge aus $\underline{f}^{\sim(k)}$ herleitbarer Lsgen.
- Abschätzung
  - Gegeben $\underline{f}^{\sim(k)}$
  - Kosten $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ der besten *vollständigen* Lösung in $D(\underline{f}^{\sim(k)})$?
- Verwerfe $\underline{f}^{\sim(k)}$, falls $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ > best_cost
  - Suchbaum wird gestutzt
- Aus Teillösung Endkosten „erraten“
  - Abschätzung!

# Branch-and-Bound 2

```
float best_cost;
solution_element cur_sol[n], best_sol;

b_and_b(int k) {
        float new_cost;
        solution_element sol_el;
        if (k = n){
                new_cost := cost(cur_sol);
                if (new_cost < best_cost) {
                        best_cost       := new_cost;
                        best_sol        := copy(cur_sol);
                }
        } else if (lower_bound_cost(cur_sol, k) >= best_cost)
                        /* tu nix, stutze baum */;
        else foreach (sol_el ∈ allowed(cur_sol, k)) {
                        cur_sol[k] := sol_el;
                        b_and_b(k+1);
                }
}
main {
        best_cost := ∞;
        b_and_b(0);
        report(best_sol);
}
```

# Branch-and-Bound 3

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - Zu optimistisch ("ja, es lohnt sich weiterzumachen")
    - Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - Zu pessimistisch ("nein, das bringt nichts mehr")
    - Optimum wird möglicherweise übersehen!
      - Keine exakte Lösung mehr!
- ➢ $c^{\sim}(\underline{f}^{\sim(k)})$ sollte möglichst genau sein
  - Darf aber Kosten <u>keinesfalls</u> überschätzen!
- Wunsch: Schneller als vollständige Suche

➔ Abwägen!

# Branch-and-Bound 4

- Aufbau der Abschätzungsfunktion

$$\tilde{c}(\tilde{f}^{(k)}) = \tilde{g}(\tilde{f}^{(k)}) + \tilde{h}(\tilde{f}^{(k)})$$

**Basiert auf bekannten $f_i$, $i \leq k$**

**TSP: Länge des bekannten Pfades**

**Basiert auf unbekannten $f_i$, $i > k$**

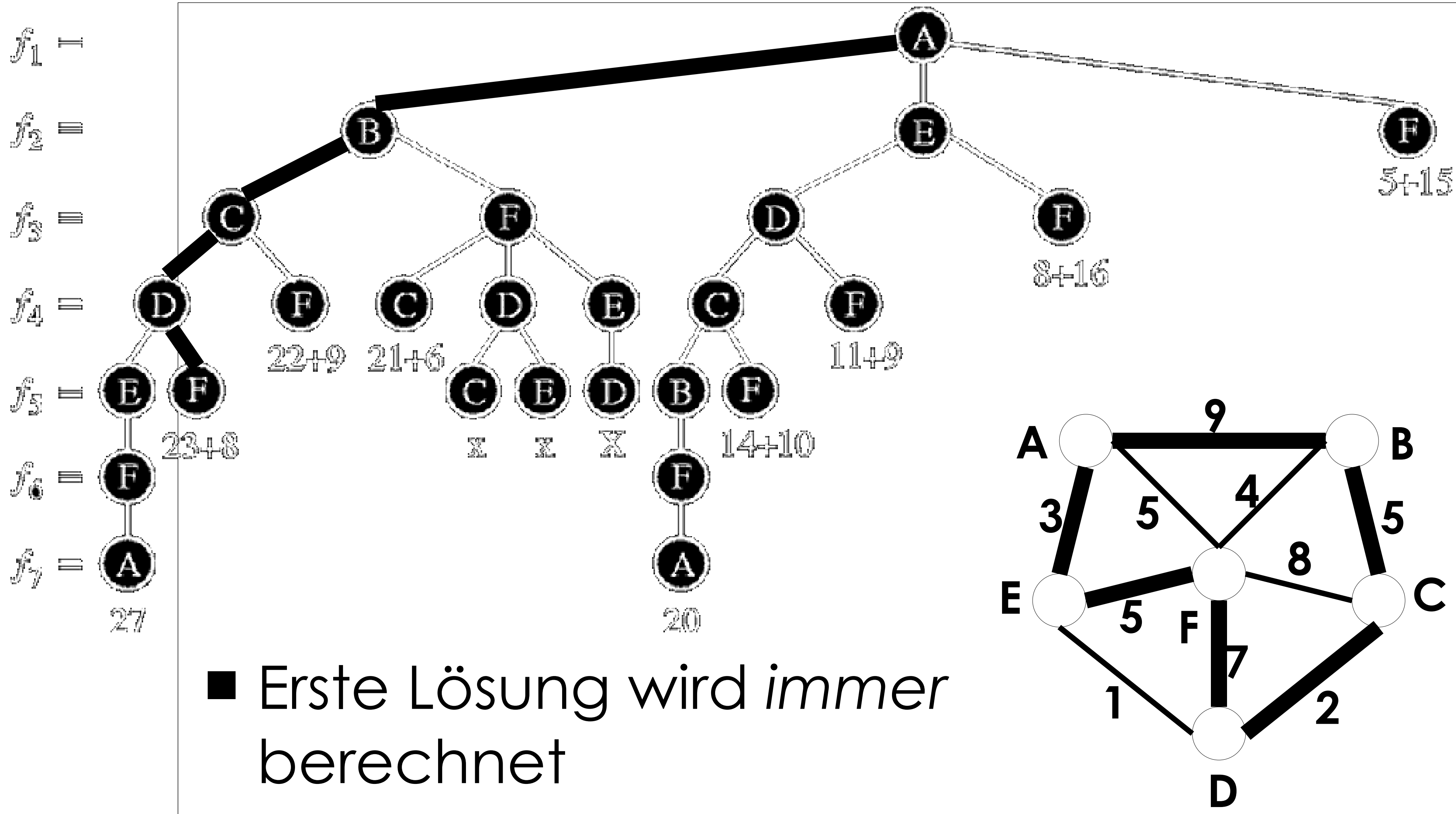
**TSP: Verbinde verbliebene Knoten <u>irgendwie</u>**

**➔ Minimaler überspannender Baum (MST)**

# Branch-and-Bound 5

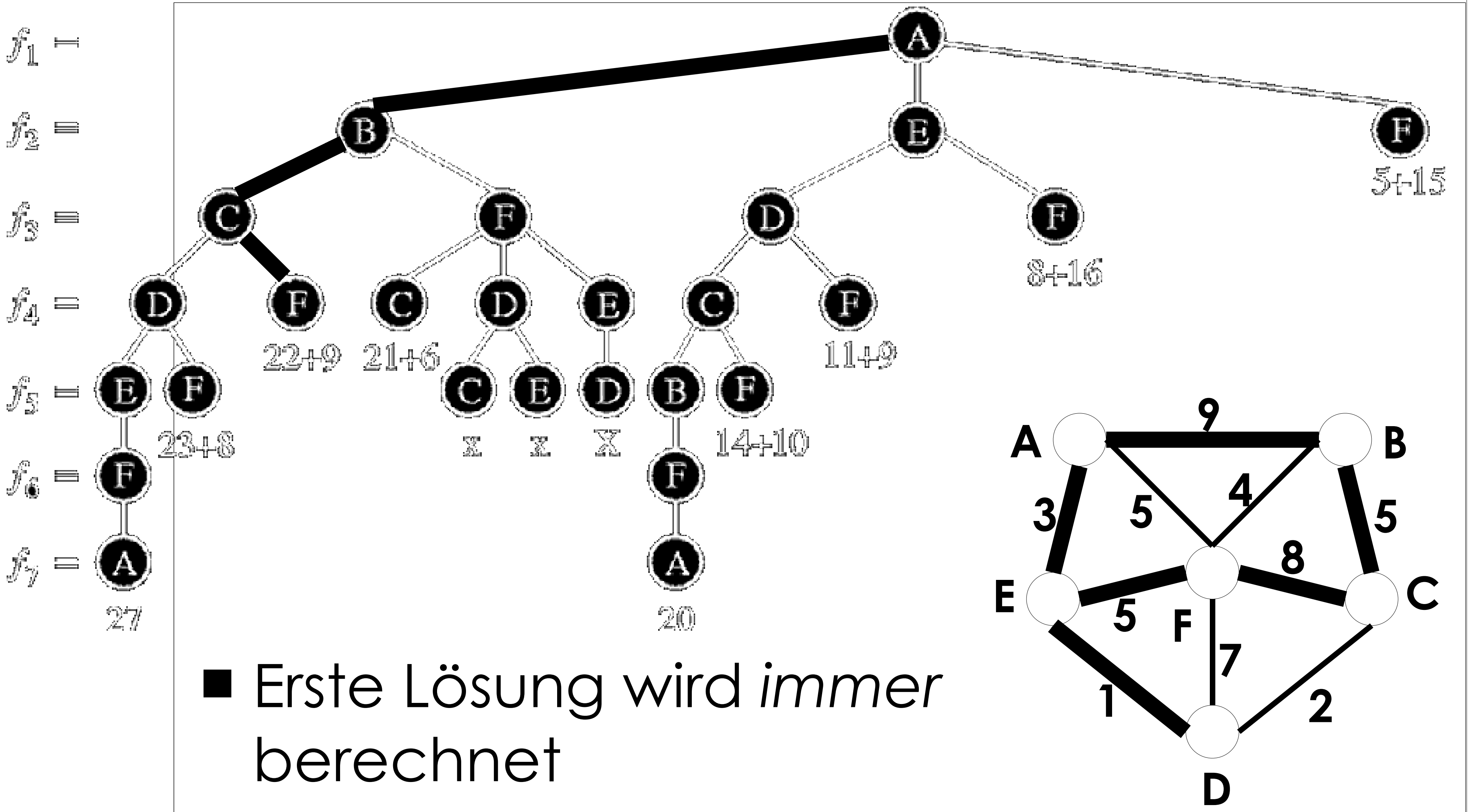
- MST
  - Weniger Einschränkungen als TSP
    - Kein Zyklus
    - Kein einfacher Pfad
  - MST immer kürzer oder gleich TSP
    - Optimistische Abschätzung
- MST läuft in $O(n^2)$: Prims Algorithmus
  - Besser als NP-vollständig für TSP

# TSP via Branch-and-Bound 1




- Erste Lösung wird *immer* berechnet
- Dann „bound“

# TSP via Branch-and-Bound 2




- Erste Lösung wird *immer* berechnet

# Variationen

- Verschiedene Sucharten
  - Welche Teillösung weiter verfeinern?
- Bisher DFS
- Alternative Vorgehensweise
  - BFS
  - Greedy
    - Schnelles Finden einer Lösung
    - Maximales Stutzen

# Dynamic Programming 1

- Wiederverwendung von Lösungen
- Prinzip der Optimalität
  - Annahme:
    *Lösung eines komplexen Problems kann optimal aus den optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammengesetzt werden*
  - Gilt aber nicht für alle Probleme!
- p: Parameter für Problemkomplexität
  - p = k: Gesamtproblem
  - p < k: Teilproblem
  - p = 0 oder p = 1: Kleinstes Problem

# Dynamic Programming 2

- Fibonacci-Zahlen: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...
  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit $F_0=0,\ F_1=1$

```
fib(int n) {
  if (n=0)
    return(0);
  else if (n=1)
    return(1);
  else
    return(fib(n-1)+fib(n-2));
}
```

- **$F_n/F_{n+1} \simeq 1{,}6 \Rightarrow F_n > 1{,}6^n$**
- **Summiere 0 und 1**
  **$\Rightarrow$ $1{,}6^n$ Schritte**

```
int Fib[MAXFIB];

fib(int n) {
  Fib[0] := 0;
  Fib[1] := 1;
  for (i=2; i<=n; ++i)
      Fib[i] := Fib[i-1]+Fib[i-2];
  return(Fib[n]);
}
```

- **n Schritte**
- **Teillösungen bei p = i**
- **Lösung bei p = n**

# Dynamic Programming 3

- Dijkstras Kürzester Pfad - Algorithmus
  - "Finde kürzesten Pfad über die an $v_S$ nahegelegensten *k* Knoten"
  - ➢ Komplexitätsparameter: $p = k$
  - $p = 0$: $u.dist = w((v_S, u))$ für alle $u \in V$
    - Finde Knoten *u* mit min. *dist*
    - Transferiere *u* von V nach *T*
    - Aktualisiere *dist* aller Knoten in V

**Teillösungen in *dist***

  - p = k+1: Finde Knoten $u \in V$ mit min. *dist*
    - Transferiere *u* von V *nach T*
    - Aktualisiere *dist* aller Knoten in V

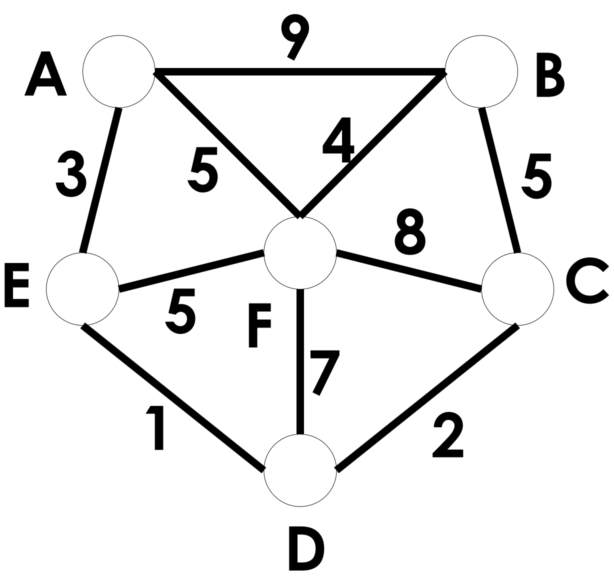
# TSP via Dynamic Programming 1

- $G(V,E)$, Kanten gewichtet mit $w$
- Wähle beliebiges $v_S \in V$
- $p = k$: "finde kürzeste Pfade von $v_S$ zu $v \in V \setminus \{v_S\}$ durch $k$ Zwischenknoten"
- $C(S,v)$: Länge des kürzesten Pfades von $v_S$ nach $v$ durch die Knoten in $S$
- TSP ist $C(S \setminus \{v_S\}, v_S)$: $p=k+1$

$$C(S,v) = \min_{m \in S} \left[ C(S \setminus \{m\}, m) + w((m,v)) \right]$$

# TSP via Dynamic Programming 2

- TSP mit $v_S$=A
- $p$=0: $C(\emptyset, v) = w((v_S, v))$ für $(v_S, v) \in E$, sonst $\infty$
  - $C(\emptyset, B) = 9$
  - $C(\emptyset, C) = \infty$
  - $C(\emptyset, D) = \infty$
  - $C(\emptyset, E) = 3$
  - $C(\emptyset, F) = 5$



# TSP via Dynamic Programming 3

- Zwischenergebnisse für $p = 0$
  - $C(\emptyset, B) = 9$, $C(\emptyset, C) = \infty$, $C(\emptyset, D) = \infty$, $C(\emptyset, E) = \infty$, $C(\emptyset, F) = 5$
- $p=1$: Berechne alle Kombinationen von $|S|=1$ und v (5 x 4 Möglichk.). Auszug:
  - $C(\{B\}, C) = C(\emptyset, B) + w((B, C)) = 9 + 5 = 14$
  - $C(\{B\}, F) = C(\emptyset, B) + w((B, F)) = 9 + 4 = 13$
  - $C(\{F\}, B) = C(\emptyset, F) + w((F, B)) = 5 + 4 = 9$
  - ...
- min entfällt bei $|S|=1$ (nur ein Element!)

# TSP via Dynamic Programming 4

- Einige Zwischenergebnisse für p=1:
  - $\boxed{C(\{B\}, F)=13}$, $\boxed{C(\{F\}, B)=9}$
- *p=|S|=2: {5x4}x3 Möglichkeiten, Auszug:*

$$C(\{B,F\},C)=$$

$$\min\left[\boxed{C(\{B\},F)}+w((F,C)),\ \boxed{C(\{F\},B)}+w((B,C))\right]$$

**13 + 8** **9 + 5**

➔ $C(\{B,F\},C)=14$

# TSP via Dynamic Programming 5

- Ein Zwischenergebnis für $p$=2:
  - $C(\{B, F\}, C) = 14$
  - "Kürzester Pfad von $A$ nach C über $\{B, F\}$ hat Länge 14"
- Ad nauseam bis $p=|S|=n-1$
  - $C(\{B, C, D, E, F\}, A) = 20$
  - *"Kürzester Pfad von A nach A über {B, C, D, E, F} hat Länge 20"*

  → TSP
- Immer noch NP-hart: $2^n$ Untermengen
  - Untersuche aber nur optimale Teillösungen

# Lineare Programmierung 1

- Mathematische Modelle als Grundlage
- Beispiel: Optimiere auf max. Umsatz

| | Preis | Rohstoff A | Rohstoff B |
|---|---|---|---|
| Produkt 1 | 550 | 42 | 23 |
| Produkt 2 | 250 | 14 | 53 |
| Liefermenge | | 100 | 200 |

- Modell: $x_1$ Produkt 1, $x_2$ Produkt 2

$$\max: 550\,x_1 + 250\,x_2$$

$$42\,x_1 + 14\,x_2 \leq 100$$

$$23\,x_1 + 53\,x_2 \leq 200$$

# Lineare Programmierung 2

- Lösbar in P
  - Ellipsoid Verfahren (1979)
- Praktisch schneller sind Verfahren in NP
  - Simplex (1947)
- Theoretisch besser (auch in P)
  - Interior Point, projective method (1984)
- Lösung durch "LP Solver"
  - lp_solve, GLPK, CLP (public domain)
  - CPLEX (kommerziell, aber viel schneller!)
- Beispiel: $x_1$=1,31303, $x_2$=3,20378
  - Umsatz 1523,11

# Integer LP 1

- Problem
  - Häufig nur ganzzahlige Variablen erlaubt
- ➢ Integer Lineare Programmierung (ILP)
- Lösungsmethoden komplizierter
  - Rundung *nicht* sinnvoll
    - Sub-optimal
      - Beispiel $x_1' = 1$, $x_2' = 3$: Gewinn 1300
    - Ungültige Werte
- Beispiel: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, Gewinn 1350

➔ Lösungsverfahren jetzt NP-vollständig

# Integer LP 2

- Häufig weitere Einschränkung
  - Variablen nur 0 oder 1
  - ➢ 0-1 ILP
- Lösungsverfahren
  - LP kombiniert mit branch-and-bound
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem), nur bei 0-1

# TSP via 0-1 ILP - 1

- Pro Kante $e_i \in E$ ein $x_i$, $1 \leq i \leq |E| = k$
  - $x_i = 1$ wenn $x_i$ im optimalen Zyklus, $=0$ sonst
  - Entscheidungsvariablen
  - Zykluslänge (Gewicht)

$$\sum_{i=1}^{k} w(e_i)\, x_i$$

# TSP via 0-1 ILP - 2

- Zyklus (I)
  - An jedem Knoten müssen zwei Kanten selektiert werden

$$v_1: x_1+x_2+x_3+x_4=2$$

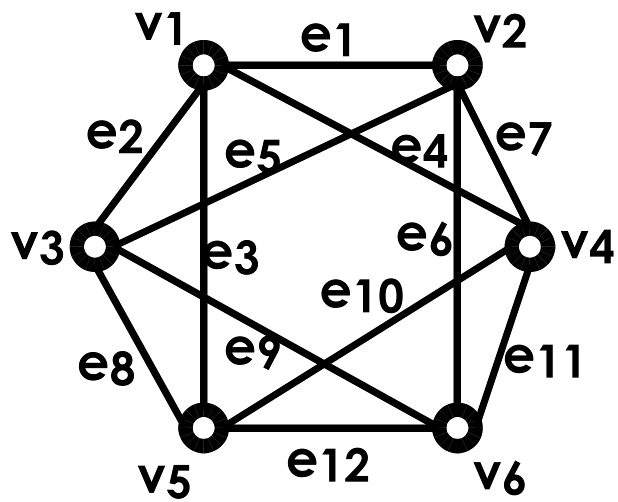
$$v_2: x_1+x_5+x_6+x_7=2$$

$$v_3: x_2+x_5+x_6+x_7=2$$

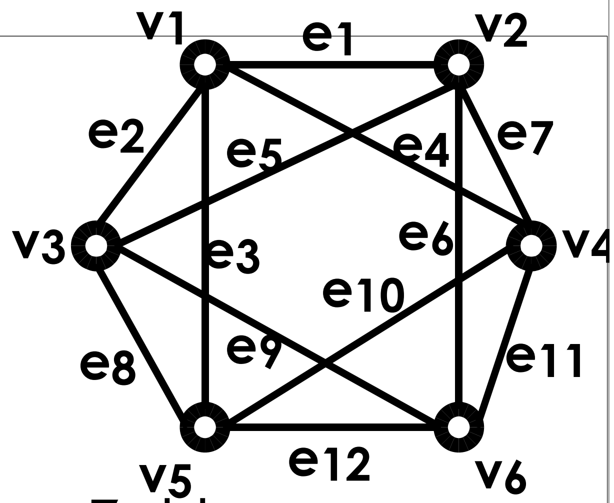
$$v_4: x_4+x_7+x_{10}+x_{11}=2$$

$$v_5: x_3+x_8+x_{10}+x_{12}=2$$

$$v_6: x_6+x_9+x_{11}+x_{12}=2$$



# TSP via 0-1 ILP - 3




- Zyklus (II)
  - Vermeide unverbundene Zyklen
  - Kleinster Zyklus: 3 Knoten
    - Da 2 Kanten pro Knoten
  - Bestimme alle unverbundenen Zyklen
  - Fordere Verbindungen dazwischen

$$\{v_{1,} v_{2,} v_3\} + \{v_{4,} v_{5,} v_6\} : x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 2$$

$$\{v_{1,} v_{3,} v_5\} + \{v_{2,} v_{4,} v_6\} : x_1 + x_4 + x_5 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 2$$

$$\{v_{1,} v_{2,} v_4\} + \{v_{3,} v_{5,} v_6\} : x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_{10} + x_{11} \geq 2$$

$$\{v_{1,} v_{4,} v_5\} + \{v_{3,} v_{2,} v_6\} : x_1 + x_7 + x_{11} + x_{12} + x_8 + x_2 \geq 2$$

# (I) Lineare Programmierung

- Modelle werden i.d.R. generiert
  - Spezielle Sprachen: z.B. AMPL, GNU MathProg
  - Mittels konventioneller Programme
  - Textdatei
  - API in eingebundene Bibliothek
- I(LP) Parameter
  - Anzahl Variablen
  - Anzahl Bedingungen
- Mixed ILP: LP und ILP
- Non-Linear Programming (NLP)

# Vorbereitung

- Kapitel 9 bis einschließlich 9.3
  - Verdrahtung

# Zusammenfassung

- Exakte Lösungsverfahren
- Backtracking
  - Erschöpfende Suche
- Branch-and-Bound
  - Stutzen des Suchbaumes
- Dynamic Programming
  - Wiederverwendung von Teillösungen
- (Integer) Lineare Programmierung
  - Mathematische Modelle