Algorithmen für Chip-Entwurfswerkzeuge

Mathematische Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Vorlesung
WS 2014/2015

Andreas Koch

Eingebette Systeme und Anwendungen
Technische Universität Darmstadt

Embedded Systems & Applications

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls suboptimale Lösungen akzeptabel:

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls suboptimale Lösungen akzeptabel:
  - Näherungsverfahren, Approximationen

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls suboptimale Lösungen akzeptabel:
  - Näherungsverfahren, Approximationen
    - Garantieren eine bestimmte Lösungsqualität

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls suboptimale Lösungen akzeptabel:
  - Näherungsverfahren, Approximationen
    - Garantieren eine bestimmte Lösungsqualität
    - Nicht allgemein formulierbar

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls suboptimale Lösungen akzeptabel:
  - Näherungsverfahren, Approximationen
    - Garantieren eine bestimmte Lösungsqualität
    - Nicht allgemein formulierbar
  - Heuristiken

Art der Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Alle Probleme im Bereich VLSI CAD sind Optimierungsprobleme, viele davon sind
  - NP-vollständig
  - NP-hart (mindestens so aufwendig wie NP-vollständig)
- Exakt lösbar nur für kleine Problemgrößen
- Falls suboptimale Lösungen akzeptabel:
  - Näherungsverfahren, Approximationen
    - Garantieren eine bestimmte Lösungsqualität
    - Nicht allgemein formulierbar
  - Heuristiken
    - Schwankende Lösungsqualität

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit
- Signalverzögerung

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit
- Signalverzögerung
- Energieverbrauch

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit
- Signalverzögerung
- Energieverbrauch
- Thermisches Verhalten

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit
- Signalverzögerung
- Energieverbrauch
- Thermisches Verhalten

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit
- Signalverzögerung
- Energieverbrauch
- Thermisches Verhalten

$\Rightarrow$ Zielfunktion (objective function) (Funktion die max./min. werden soll) entsprechend wählen

Optimierungsziele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtverbindungslänge
  - Optimiert indirekt auch andere Ziele
- Verdrahtungsdichte / Verdrahtbarkeit
- Signalverzögerung
- Energieverbrauch
- Thermisches Verhalten

$\Rightarrow$ Zielfunktion (objective function) (Funktion die max./min. werden soll) entsprechend wählen

Am gebräuchlichsten:

(Gewichtete) Gesamtverbindungslänge

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?
  - Schaltungselement

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?
  - Schaltungselement
    - Gatter, Werttabellen (LUT), Register, I/O-Blöcke, ...

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?
  - Schaltungselement
    - Gatter, Werttabellen (LUT), Register, I/O-Blöcke, ...
    - Bleiben konstant, exakte Verzögerungen bekannt

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?
  - Schaltungselement
    - Gatter, Werttabellen (LUT), Register, I/O-Blöcke, ...
    - Bleiben konstant, exakte Verzögerungen bekannt
  - Netze

Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

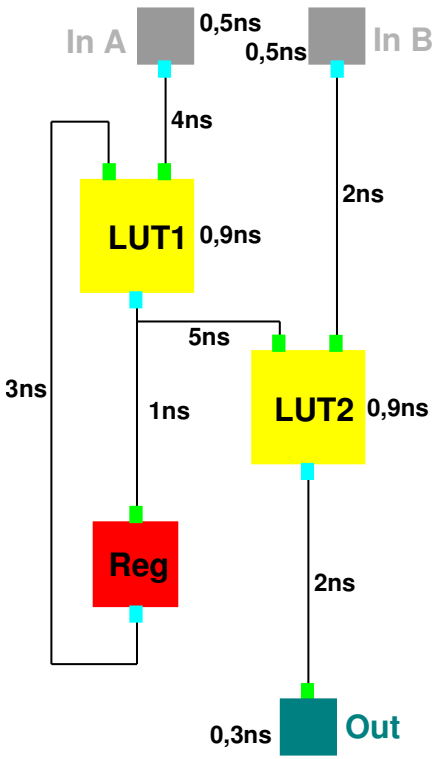
- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?
  - Schaltungselement
    - Gatter, Werttabellen (LUT), Register, I/O-Blöcke, ...
    - Bleiben konstant, exakte Verzögerungen bekannt
  - Netze
    - Nur nach Layouterzeugung bekannt

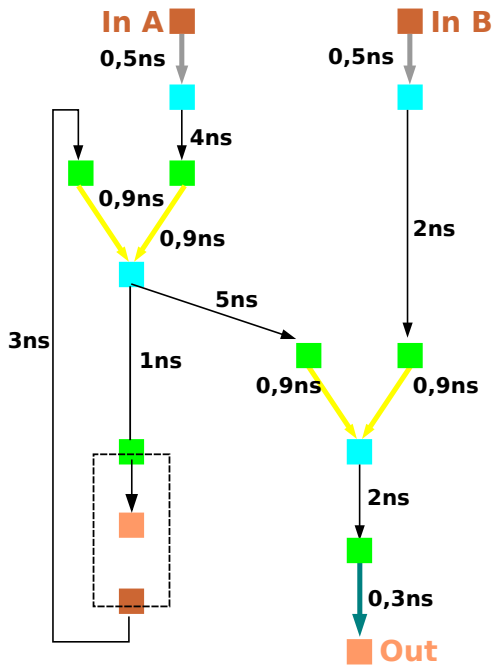
Timing-Analyse
Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wozu?
  - Zielfunktion für Optimierung? Nein!
    Häufige Auswertung zu teuer
  - Analysiere fertige Layouts
  - Analysiere einzelne Verbindungen *während* Layouterzeugung
    - Erkenne kritische Verbindungen
    - Behandle diese mit Vorrang
- Worauf?
  - Schaltungselement
    - Gatter, Werttabellen (LUT), Register, I/O-Blöcke, ...
    - Bleiben konstant, exakte Verzögerungen bekannt
  - Netze
    - Nur nach Layouterzeugung bekannt
    - Vorher schätzen

Modellierung





- Auf *4-partitem* Graph
  - Externe Eingänge
  - Externe Ausgänge
  - Eingangs-Ports
  - Ausgangs-Ports

Berechnung Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ankunftszeit (arrival) an Knoten v
  $T_a(v) = \max_{(u,v)\in E}(T_a(u) + w(u, v))$

Berechnung Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ankunftszeit (arrival) an Knoten v
  $T_a(v) = \max_{(u,v)\in E}(T_a(u) + w(u, v))$
- Idee: BFS oder DAG LP

Berechnung Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ankunftszeit (arrival) an Knoten v
  $T_a(v) = \max_{(u,v)\in E}(T_a(u) + w(u, v))$
- Idee: BFS oder DAG LP
  - Beginne mit $T_a(v) = 0$ bei folgenden Knoten:
    Externer Eingänge, Registerausgänge

Berechnung Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ankunftszeit (arrival) an Knoten v
  $T_a(v) = \max_{(u,v)\in E}(T_a(u) + w(u, v))$
- Idee: BFS oder DAG LP
  - Beginne mit $T_a(v) = 0$ bei folgenden Knoten:
    Externer Eingänge, Registerausgänge
  - Bearbeite Knoten bei denen alle Vorgänger bearbeitet sind

Berechnung Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ankunftszeit (arrival) an Knoten v
  $T_a(v) = \max_{(u,v)\in E}(T_a(u) + w(u, v))$
- Idee: BFS oder DAG LP
  - Beginne mit $T_a(v) = 0$ bei folgenden Knoten:
    Externer Eingänge, Registerausgänge
  - Bearbeite Knoten bei denen alle Vorgänger bearbeitet sind
  - Späteste Gesamtankunftszeit D_{max} = Taktperiode
    (an Externen Ausgängen, Registereingängen)

Berechnung Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ankunftszeit (arrival) an Knoten v
  $T_a(v) = \max_{(u,v)\in E}(T_a(u) + w(u, v))$
- Idee: BFS oder DAG LP
  - Beginne mit $T_a(v) = 0$ bei folgenden Knoten:
    Externer Eingänge, Registerausgänge
  - Bearbeite Knoten bei denen alle Vorgänger bearbeitet sind
  - Späteste Gesamtankunftszeit D_{max} = Taktperiode
    (an Externen Ausgängen, Registereingängen)

In Beispielschaltung

D_{max} = 13.6 ns

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?
  - Hier auf Zeitintervalle anwenden

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?
  - Hier auf Zeitintervalle anwenden

Beantwortet die Frage

Wieviel langsamer kann ein Netz werden ohne das die gesamte Schaltung leidet?

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?
  - Hier auf Zeitintervalle anwenden

Beantwortet die Frage

Wieviel langsamer kann ein Netz werden ohne das die gesamte Schaltung leidet?

- Berechung

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?
  - Hier auf Zeitintervalle anwenden

Beantwortet die Frage

Wieviel langsamer kann ein Netz werden ohne das die gesamte Schaltung leidet?

- Berechung
  - Mittels spätestmöglicher Ankunftszeit

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?
  - Hier auf Zeitintervalle anwenden

Beantwortet die Frage

Wieviel langsamer kann ein Netz werden ohne das die gesamte Schaltung leidet?

- Berechung
  - Mittels spätestmöglicher Ankunftszeit
  - Required Time $T_r(v)$ an Knoten v

Spätestmögliche Ankunftszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie unwichtig sind unkritische Netze?
  - Hier auf Zeitintervalle anwenden

Beantwortet die Frage

Wieviel langsamer kann ein Netz werden ohne das die gesamte Schaltung leidet?

- Berechung
  - Mittels spätestmöglicher Ankunftszeit
  - Required Time $T_r(v)$ an Knoten v
  - Spätestmöglicher Ankunftszeitpunkt von Signalen
    $\Rightarrow$ Sonst Verlangsamung der gesamten Schaltung

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten:
  Externen Ausgänge, Registereingänge

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten: Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten: Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts
- Rückwärts $\Rightarrow$ Graph mit umgedrehten Kanten

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten:
  Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts
- Rückwärts $\Rightarrow$ Graph mit umgedrehten Kanten
- Bearbeite Knoten

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten: Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts
- Rückwärts $\Rightarrow$ Graph mit umgedrehten Kanten
- Bearbeite Knoten
  - Nur mit komplett bearbeiteten Vorgängern

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten: Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts
- Rückwärts $\Rightarrow$ Graph mit umgedrehten Kanten
- Bearbeite Knoten
  - Nur mit komplett bearbeiteten Vorgängern
  - $T_r(u) = \min_{(u,v)\in E}(T_r(v) - w(u,v))$

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten: Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts
- Rückwärts $\Rightarrow$ Graph mit umgedrehten Kanten
- Bearbeite Knoten
  - Nur mit komplett bearbeiteten Vorgängern
  - $T_r(u) = \min_{(u,v)\in E}(T_r(v) - w(u,v))$
- *Slack (Schlupf)* einer Verbindung von u nach v
  $slack(u,v) = T_r(v) - T_a(u) - w(u,v)$

Berechnung
Spätestmögl. Ankunftszeit und Slack

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginne mit $T_r(u) = D_{max}$ bei folgenden Knoten: Externen Ausgänge, Registereingänge
- Nun BFS/LP Rückwärts
- Rückwärts $\Rightarrow$ Graph mit umgedrehten Kanten
- Bearbeite Knoten
  - Nur mit komplett bearbeiteten Vorgängern
  - $T_r(u) = \min_{(u,v)\in E}(T_r(v) - w(u,v))$
- *Slack (Schlupf)* einer Verbindung von u nach v $slack(u,v) = T_r(v) - T_a(u) - w(u,v)$
- Auf kritischem Pfad: $slack = 0$

Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Node: 4  INPAD_SOURCE Block #2 (s27_in_3_)
T_arr: 0  T_req: -3.88578e-16  Tdel: 5e-10

Node: 5  INPAD_OPIN Block #2 (s27_in_3_)
Pin: 0
T_arr: 5e-10  T_req: 5e-10  Tdel: 5e-09
Net to next node: #2 (s27_in_3_).  Pins on net: 5.

Node: 12  CLB_IPIN Block #6 (s27_out)
Pin: 0
T_arr: 5.5e-09  T_req: 5.5e-09  Tdel: 0

Node: 17  SUBBLK_IPIN Block #6 (s27_out)
Pin: 0 Subblock #0
T_arr: 5.5e-09  T_req: 5.5e-09  Tdel: 9e-10

Node: 21  SUBBLK_OPIN Block #6 (s27_out)
Pin: 4 Subblock #0
T_arr: 6.4e-09  T_req: 6.4e-09  Tdel: 0

Node: 16  CLB_OPIN Block #6 (s27_out)
Pin: 4
T_arr: 6.4e-09  T_req: 6.4e-09  Tdel: 1e-09
Net to next node: #5 (s27_out).  Pins on net: 2.

Node: 10  OUTPAD_IPIN Block #5 (out:s27_out)
Pin: 0
T_arr: 7.4e-09  T_req: 7.4e-09  Tdel: 3e-10

Node: 11  OUTPAD_SINK Block #5 (out:s27_out)
T_arr: 7.7e-09  T_req: 7.7e-09

Tnodes on crit. path: 8  Non-global nets on crit. path: 2.
Global nets on crit. path: 0.
Total logic delay: 1.7e-09 (s)  Total net delay: 6e-09 (s)
```

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung
- Exaktes Routing zu aufwendig

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung
- Exaktes Routing zu aufwendig

$\Rightarrow$ Verbindungslänge für jedes Netz schätzen und aufsummieren

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung
- Exaktes Routing zu aufwendig

$\Rightarrow$ Verbindungslänge für jedes Netz schätzen und aufsummieren

  - Annahme optimales Routing möglich (d.h. keine Umwege wegen Hindernissen)

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung
- Exaktes Routing zu aufwendig

$\Rightarrow$ Verbindungslänge für jedes Netz schätzen und aufsummieren

- Annahme optimales Routing möglich (d.h. keine Umwege wegen Hindernissen)
- Für bis 3 Pins trivial: HPWL Abschätzung exakt

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung
- Exaktes Routing zu aufwendig

$\Rightarrow$ Verbindungslänge für jedes Netz schätzen und aufsummieren

  - Annahme optimales Routing möglich (d.h. keine Umwege wegen Hindernissen)
  - Für bis 3 Pins trivial: HPWL Abschätzung exakt
  - Für (viel) mehr: HPWL Abschätzung zunehmend ungenau

Gesamtverbindungslänge
Exakte Kosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Häufigstes Optimierungsziel in der Praxis
- Optimal: Exaktes (und perfektes) Routing während der Platzierung
- Exaktes Routing zu aufwendig

$\Rightarrow$ Verbindungslänge für jedes Netz schätzen und aufsummieren

- Annahme optimales Routing möglich (d.h. keine Umwege wegen Hindernissen)
- Für bis 3 Pins trivial: HPWL Abschätzung exakt
- Für (viel) mehr: HPWL Abschätzung zunehmend ungenau
- Andere Möglichkeiten RSMT, RMST, korrigierte HPWL, FLUTE, quadratische Verbindungslänge, LSE, WA, Star+, ...

Metrik
Allgemein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte (Pins) im Raum (in der Ebene)

Metrik
Allgemein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte (Pins) im Raum (in der Ebene)
- Definit: $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

Metrik
Allgemein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte (Pins) im Raum (in der Ebene)
- Definit: $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
- Symmetrisch: $d(x, y) = d(y, x)$

Metrik
Allgemein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte (Pins) im Raum (in der Ebene)
- Definit: $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
- Symmetrisch: $d(x, y) = d(y, x)$
- Erfüllt Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Metrik
Allgemein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte (Pins) im Raum (in der Ebene)
- Definit: $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
- Symmetrisch: $d(x, y) = d(y, x)$
- Erfüllt Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- Üblicherweise benutzt man von Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) := ||x - y||$$

Metrik
Allgemein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte (Pins) im Raum (in der Ebene)
- Definit: $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
- Symmetrisch: $d(x, y) = d(y, x)$
- Erfüllt Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- Üblicherweise benutzt man von Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) := ||x - y||$$

- Wichtige Frage: Wie handhabt man Netze mit mehr als 2 Pins?

1-Norm
Manhattan-/Taxi-Metrik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- p-Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_i |x_i - y_i|^p}$$

1-Norm
Manhattan-/Taxi-Metrik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- p-Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_i |x_i - y_i|^p}$$

- 1-Norm gibt Abstand wenn man sich rechtwinklig bewegt

1-Norm
Manhattan-/Taxi-Metrik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- p-Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_i |x_i - y_i|^p}$$

- 1-Norm gibt Abstand wenn man sich rechtwinklig bewegt
- Gibt exakte Länge in einem Raster

1-Norm
Manhattan-/Taxi-Metrik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- p-Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_i |x_i - y_i|^p}$$

- 1-Norm gibt Abstand wenn man sich rechtwinklig bewegt
- Gibt exakte Länge in einem Raster
- Sehr schnell zu berechnen

1-Norm
Manhattan-/Taxi-Metrik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- p-Norm induzierte Metrik

$$d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_i |x_i - y_i|^p}$$

- 1-Norm gibt Abstand wenn man sich rechtwinklig bewegt
- Gibt exakte Länge in einem Raster
- Sehr schnell zu berechnen

$\Rightarrow$ Sehr weit verbreitet

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins
- Halber Umfang des umschliessenden Rechtecks aller Pins

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins
- Halber Umfang des umschliessenden Rechtecks aller Pins
- Exakt für bis zu 3 Pins

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins
- Halber Umfang des umschliessenden Rechtecks aller Pins
- Exakt für bis zu 3 Pins
- Untere Grenze für $>$ 3 Pins

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins
- Halber Umfang des umschliessenden Rechtecks aller Pins
- Exakt für bis zu 3 Pins
- Untere Grenze für $>$ 3 Pins

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins
- Halber Umfang des umschliessenden Rechtecks aller Pins
- Exakt für bis zu 3 Pins
- Untere Grenze für $>$ 3 Pins

Vorteile

- Sehr schnell zu berechnen:

$$HPWL = (\max x_i - \min x_i) + (\max y_i - \min y_i)$$

HPWL
Half-Perimeter-Wirelength

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verallgemeinerung der 1-Norm für mehr als 2 Pins
- Halber Umfang des umschliessenden Rechtecks aller Pins
- Exakt für bis zu 3 Pins
- Untere Grenze für $>$ 3 Pins

Vorteile

- Sehr schnell zu berechnen:

$$HPWL = (\max x_i - \min x_i) + (\max y_i - \min y_i)$$

Nachteile

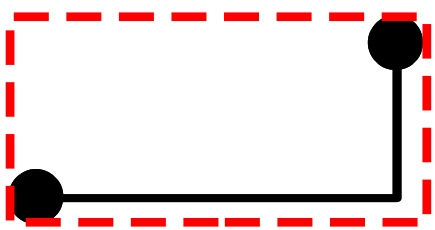
- Für große Anzahl Pins wird der schnell Fehler groß
  $\Rightarrow$ Korrekturfaktoren für große Netze (Abhängig von # Pins)
- Nicht differenzierbar

HPWL
Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

HPWL
Beispiele

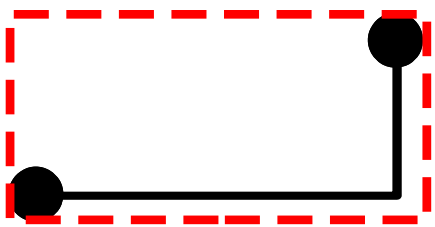
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



HPWL
Beispiele

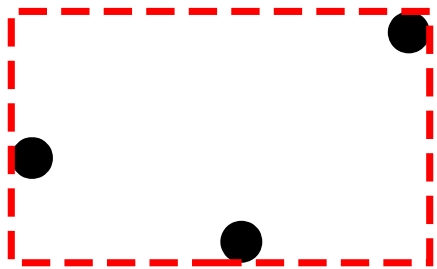
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Exakt

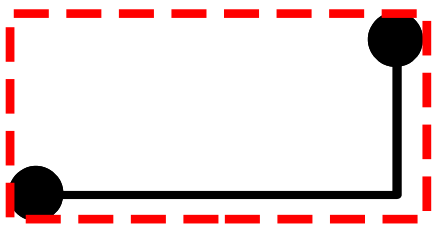


HPWL
Beispiele

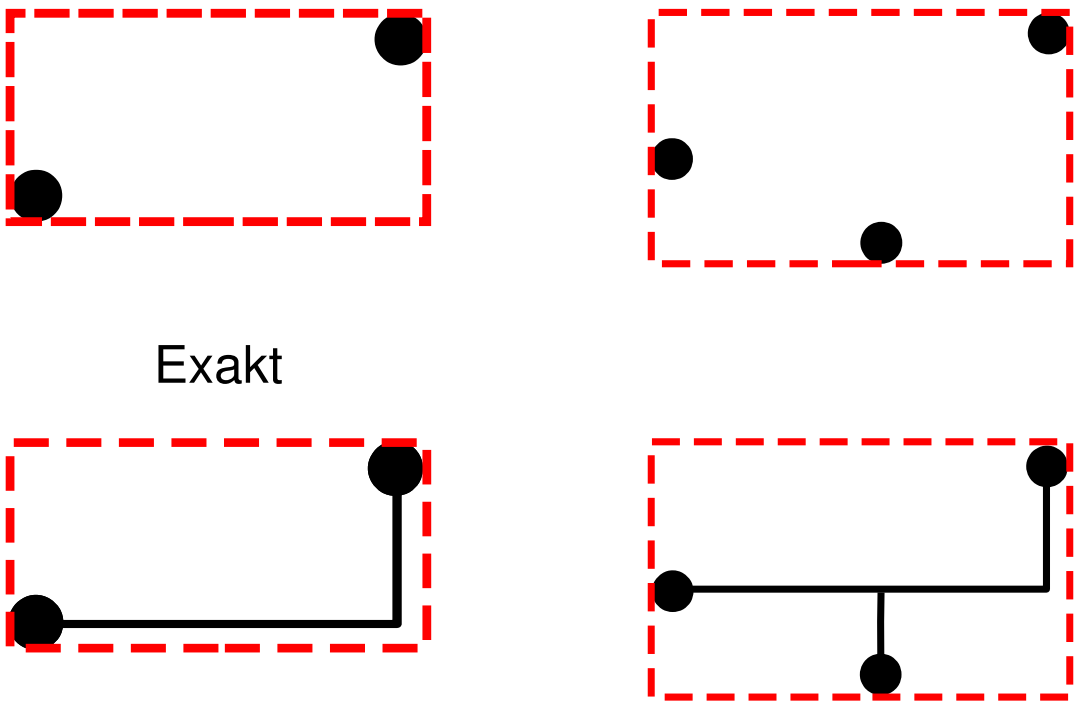
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Exakt

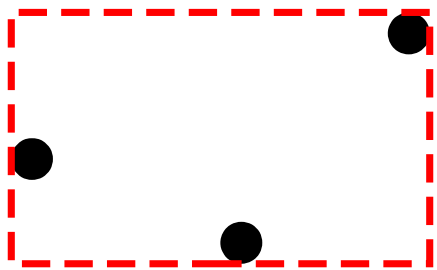


HPWL
Beispiele



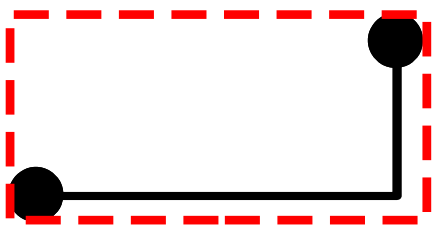
HPWL
Beispiele

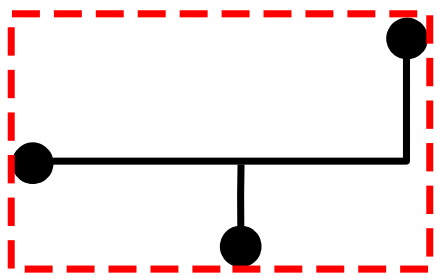
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Exakt

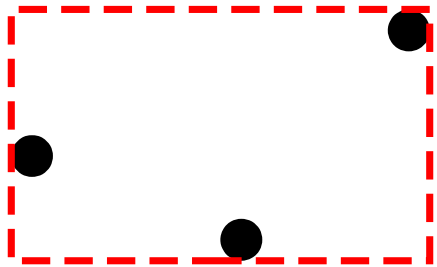
Exakt

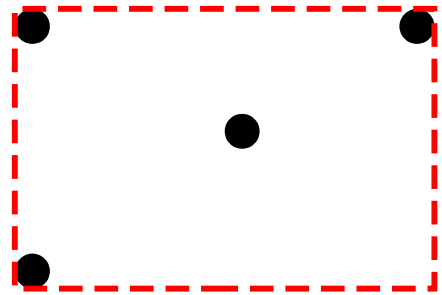




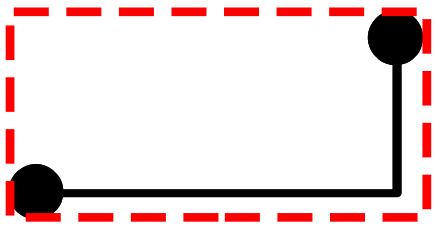
HPWL
Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

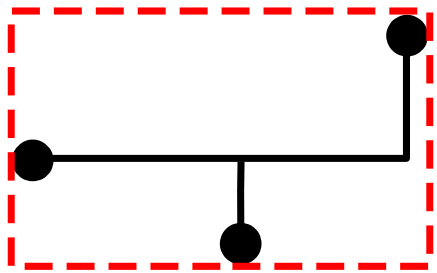




Exakt

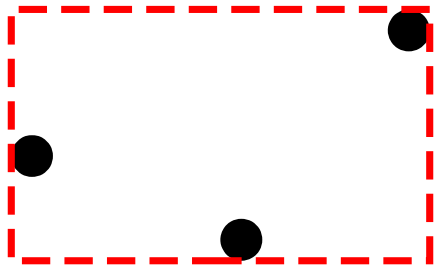


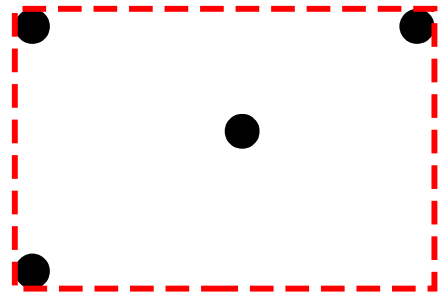
Exakt



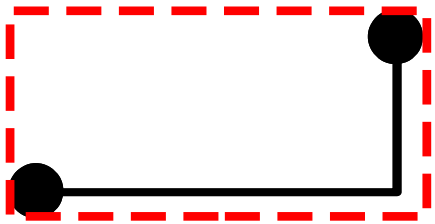
HPWL
Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

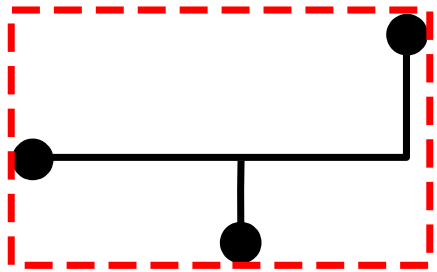


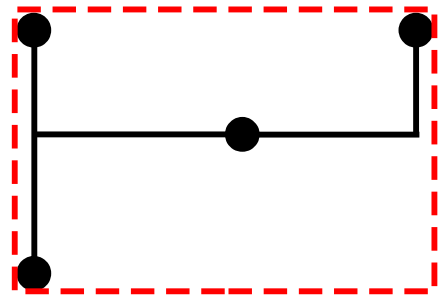


Exakt



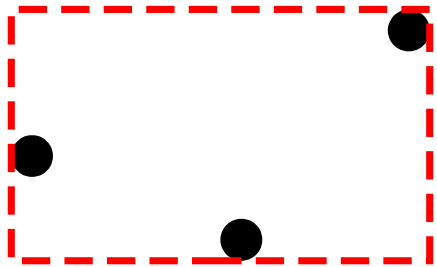
Exakt

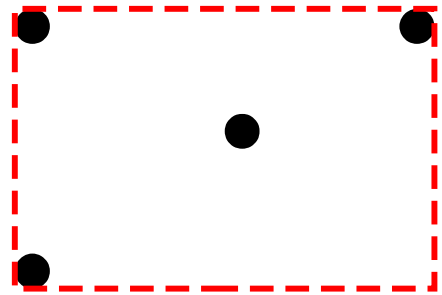




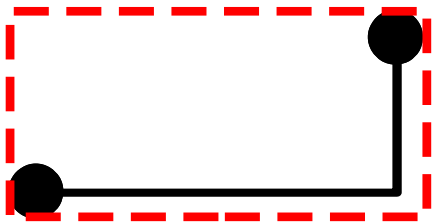
HPWL
Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

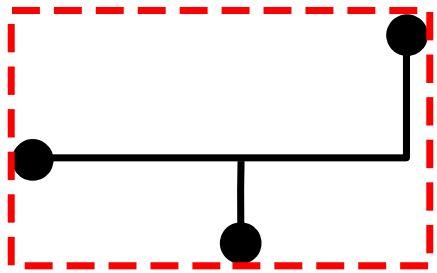




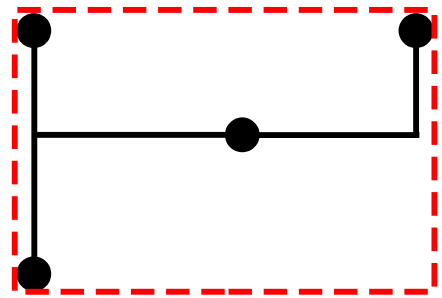
Exakt



Exakt



Untere Grenze



RSMT
Rectiliniear Steiner Minimal Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger Minimaler Steiner Baum, d.h. Steinerbaum mit rechtwinkliger Metrik

RSMT
Rectiliniear Steiner Minimal Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger Minimaler Steiner Baum, d.h. Steinerbaum mit rechtwinkliger Metrik
- Steinerbaumproblem: Finde kleinsten geometrisch aufspannenden Baum eines Graph (Verzweigungen nicht zwangsweise an Knoten)

RSMT
Rectiliniear Steiner Minimal Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger Minimaler Steiner Baum, d.h. Steinerbaum mit rechtwinkliger Metrik
- Steinerbaumproblem: Finde kleinsten geometrisch aufspannenden Baum eines Graph (Verzweigungen nicht zwangsweise an Knoten)

RSMT
Rectiliniear Steiner Minimal Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger Minimaler Steiner Baum, d.h. Steinerbaum mit rechtwinkliger Metrik
- Steinerbaumproblem: Finde kleinsten geometrisch aufspannenden Baum eines Graph (Verzweigungen nicht zwangsweise an Knoten)

Vorteile

- Exakt

RSMT
Rectiliniear Steiner Minimal Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger Minimaler Steiner Baum, d.h. Steinerbaum mit rechtwinkliger Metrik
- Steinerbaumproblem: Finde kleinsten geometrisch aufspannenden Baum eines Graph (Verzweigungen nicht zwangsweise an Knoten)

Vorteile

- Exakt

Nachteile

- NP-Vollständig $\Rightarrow$ Impraktikabel
- Normalerweise sogar Heuristiken lange Laufzeit
- NEU: FLUTE
  Tabellenbasierte RSMT-Heuristik
- Nicht differenzierbar

RMST
Rectilinear Minimum Spanning Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger minimal aufspannender Baum

RMST
Rectilinear Minimum Spanning Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger minimal aufspannender Baum

RMST
Rectilinear Minimum Spanning Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger minimal aufspannender Baum

Vorteile

- Viel schneller als RSMT:
  $\mathcal{O}(n \log n)$
- Gütegarantie: Ergebnis
  max. 50% schlechter

RMST
Rectilinear Minimum Spanning Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechtwinkliger minimal aufspannender Baum

Vorteile

- Viel schneller als RSMT: $\mathcal{O}(n \log n)$
- Gütegarantie: Ergebnis max. 50% schlechter

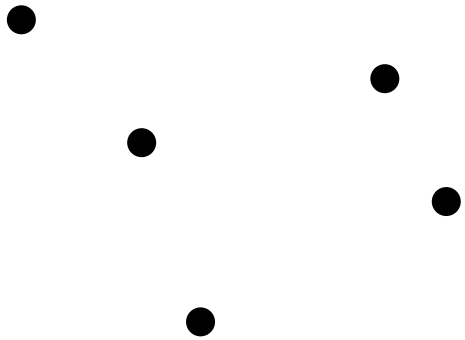
Nachteile

- Schlechter als RMST
- Vielfaches langsamer als HPWL
- Nicht differenzierbar

Vergleich
HPWL – RMST – RSMT

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

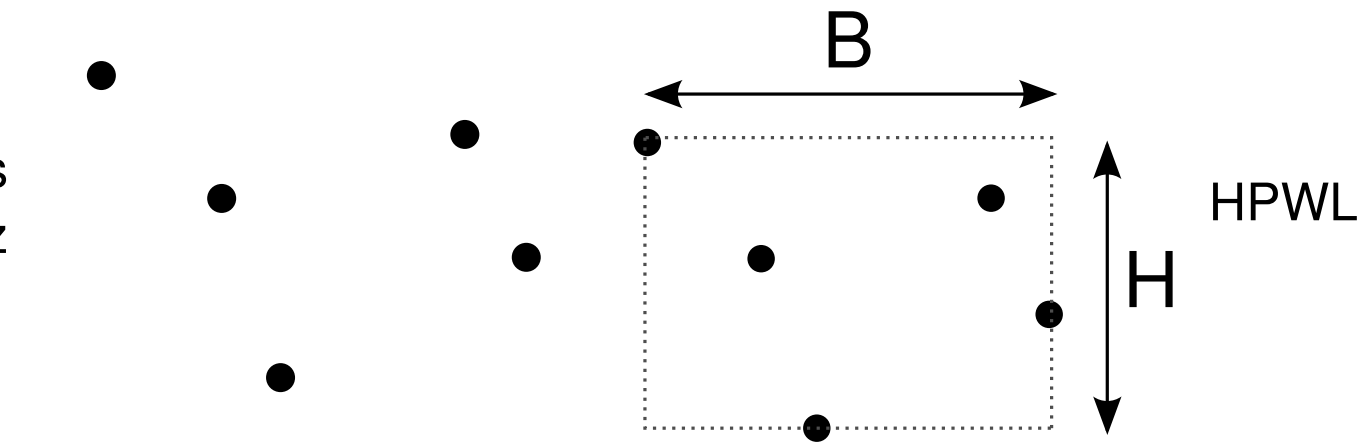
Unverbundenes Netz



Vergleich
HPWL – RMST – RSMT

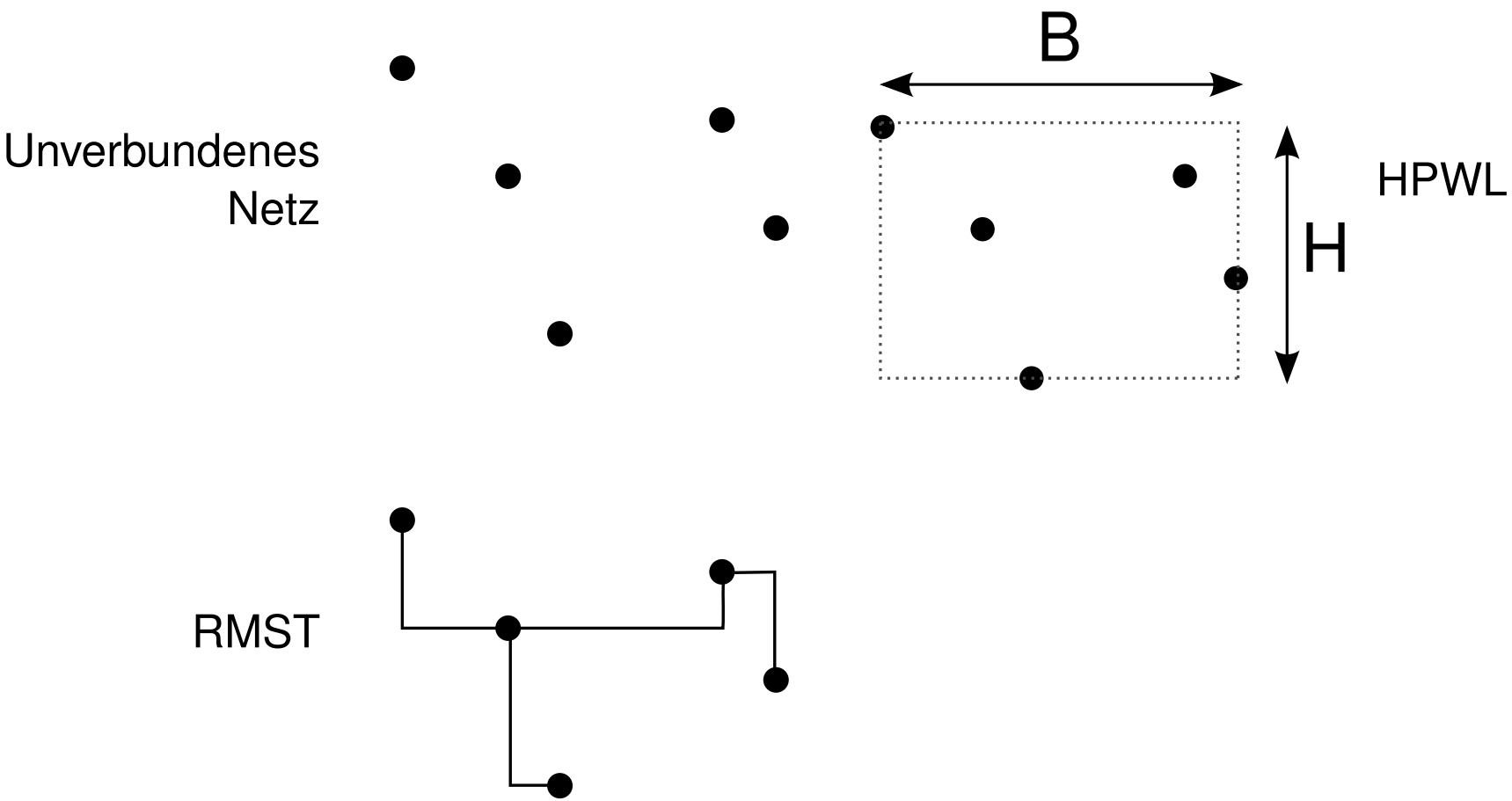
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Unverbundenes Netz



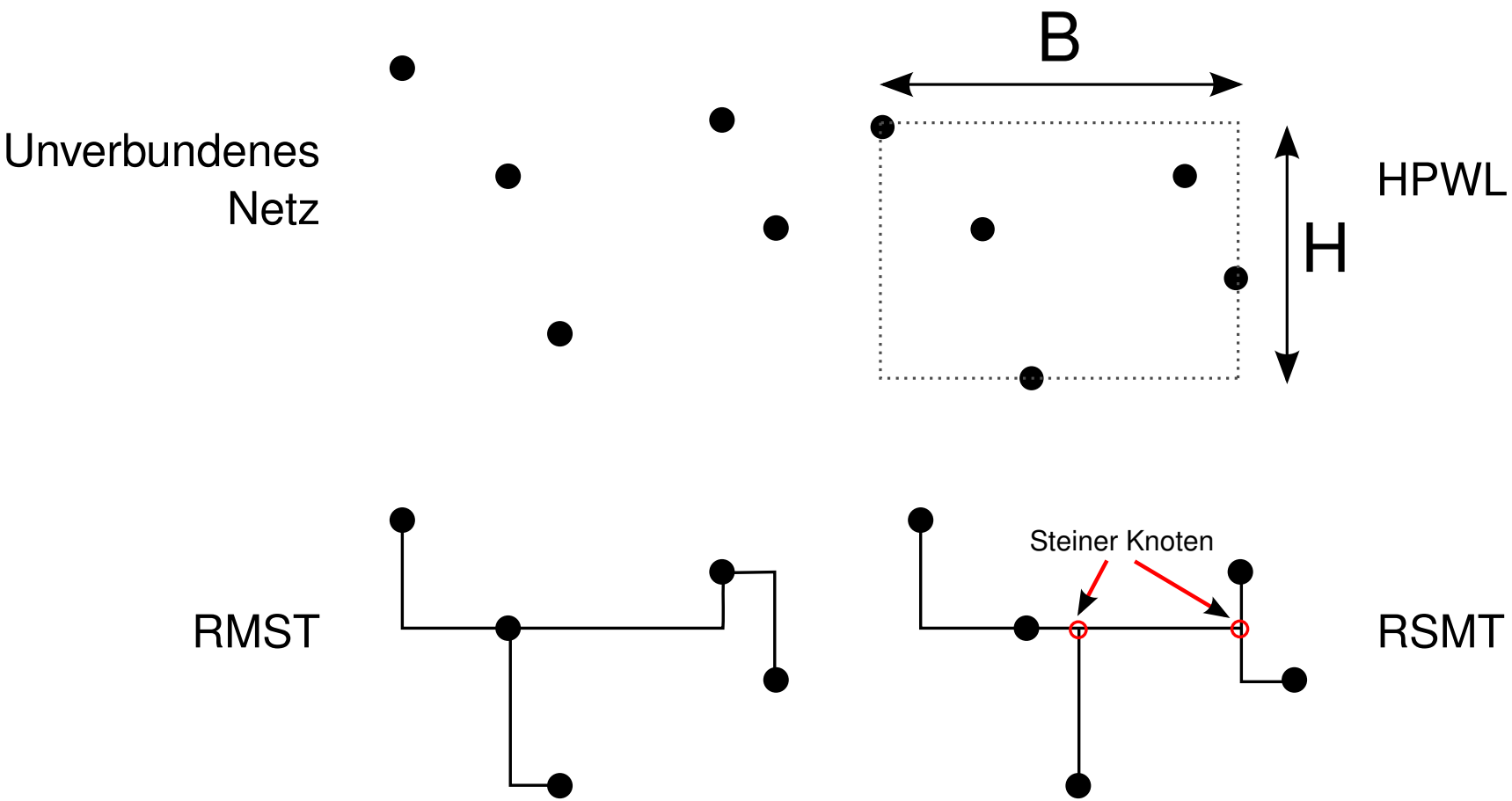
Vergleich
HPWL – RMST – RSMT

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Vergleich
HPWL – RMST – RSMT

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Nichtlineare Metriken
Quadratische Verdrahtungslänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Norm basiert, allerdings ohne Wurzel und mit Faktor

$$QWL = \frac{1}{2}((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)$$

Nichtlineare Metriken
Quadratische Verdrahtungslänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Norm basiert, allerdings ohne Wurzel und mit Faktor

$$QWL = \frac{1}{2}((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)$$

- Da oft mit Ableitung gearbeitet wird: Faktor von $\frac{1}{2}$

Nichtlineare Metriken
Quadratische Verdrahtungslänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Norm basiert, allerdings ohne Wurzel und mit Faktor

$$QWL = \frac{1}{2}((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)$$

- Da oft mit Ableitung gearbeitet wird: Faktor von $\frac{1}{2}$

Nichtlineare Metriken
Quadratische Verdrahtungslänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Norm basiert, allerdings ohne Wurzel und mit Faktor

$$QWL = \frac{1}{2}((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)$$

- Da oft mit Ableitung gearbeitet wird: Faktor von $\frac{1}{2}$

Vorteile

- Differenzierbar
- Konvex

Nichtlineare Metriken
Quadratische Verdrahtungslänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Norm basiert, allerdings ohne Wurzel und mit Faktor

$$QWL = \frac{1}{2}((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)$$

- Da oft mit Ableitung gearbeitet wird: Faktor von $\frac{1}{2}$

Vorteile

- Differenzierbar
- Konvex

Nachteile

- Weicht von linearer ($p = 1$) Norm ab $\Rightarrow$ Funktion linearisieren (z.B. Star+)

Nichtlineare Metriken
Log-Summe-Exp-Verdrahtungslänge (LSE)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Logarithmus-Summe-Exponentialfunktion:

$$LSE(z_i) = \alpha(\log(\sum_i e^{\frac{z_i}{\alpha}}))$$

Nichtlineare Metriken
Log-Summe-Exp-Verdrahtungslänge (LSE)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Logarithmus-Summe-Exponentialfunktion:

$$LSE(z_i) = \alpha(\log(\sum_i e^{\frac{z_i}{\alpha}}))$$

- Approximation der max-Funktion

Nichtlineare Metriken
Log-Summe-Exp-Verdrahtungslänge (LSE)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Logarithmus-Summe-Exponentialfunktion:

$$LSE(z_i) = \alpha(\log(\sum_i e^{\frac{z_i}{\alpha}}))$$

- Approximation der max-Funktion
- α Genauigkeit der Approximation

Nichtlineare Metriken
Log-Summe-Exp-Verdrahtungslänge (LSE)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Logarithmus-Summe-Exponentialfunktion:

$$LSE(z_i) = \alpha(\log(\sum_i e^{\frac{z_i}{\alpha}}))$$

- Approximation der max-Funktion
- α Genauigkeit der Approximation
- Für $\alpha \to 0$: LSE konvergiert gegen max

Nichtlineare Metriken
Log-Summe-Exp-Verdrahtungslänge (LSE)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Logarithmus-Summe-Exponentialfunktion:

$$LSE(z_i) = \alpha(\log(\sum_i e^{\frac{z_i}{\alpha}}))$$

- Approximation der max-Funktion
- α Genauigkeit der Approximation
- Für $\alpha \to 0$: LSE konvergiert gegen max
- Approximiert somit HPWL

$$\alpha \times ((\log(\sum_i e^{\frac{x_i}{\alpha}})) + (\log(\sum_i e^{\frac{-x_i}{\alpha}})) + (\log(\sum_i e^{\frac{y_i}{\alpha}})) + (\log(\sum_i e^{\frac{-y_i}{\alpha}}))$$

Nichtlineare Metriken
Log-Summe-Exp-Verdrahtungslänge (LSE)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Logarithmus-Summe-Exponentialfunktion:

$$LSE(z_i) = \alpha(\log(\sum_i e^{\frac{z_i}{\alpha}}))$$

- Approximation der max-Funktion
- α Genauigkeit der Approximation
- Für $\alpha \to 0$: LSE konvergiert gegen max
- Approximiert somit HPWL

$$\alpha \times ((\log(\sum_i e^{\frac{x_i}{\alpha}})) + (\log(\sum_i e^{\frac{-x_i}{\alpha}})) + (\log(\sum_i e^{\frac{y_i}{\alpha}})) + (\log(\sum_i e^{\frac{-y_i}{\alpha}}))$$

- Differenzierbar und konvex

(Nicht)lineare Metriken
Netze mit mehr als 2 Pins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Auflösen* des Multi-Pin-Netzes in mehrere 2-Pin-Netze

(Nicht)lineare Metriken
Netze mit mehr als 2 Pins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Auflösen* des Multi-Pin-Netzes in mehrere 2-Pin-Netze

  Cliquen Modell Netz wird durch vollständigen Teilgraphen (Clique) ersetzt

(Nicht)lineare Metriken
Netze mit mehr als 2 Pins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Auflösen* des Multi-Pin-Netzes in mehrere 2-Pin-Netze

  Cliquen Modell Netz wird durch vollständigen Teilgraphen (Clique) ersetzt

  Stern Modell Netz wird durch zusätzlichen Knoten und 2-Pin-Netze zu diesen Stern-Knoten ersetzt

(Nicht)lineare Metriken
Netze mit mehr als 2 Pins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Auflösen* des Multi-Pin-Netzes in mehrere 2-Pin-Netze

  Cliquen Modell Netz wird durch vollständigen Teilgraphen (Clique) ersetzt

  Stern Modell Netz wird durch zusätzlichen Knoten und 2-Pin-Netze zu diesen Stern-Knoten ersetzt

  Hybrid Modell Bis 4 Pins Clique Modell, $>$ 4 Stern Modell

Sternmetrik
Star+

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Basierend auf Stern-Netzmodell:
  Multipin-Netz wird ersetzt durch fiktiven Knoten und alle Pins verbinden zu diesem

Sternmetrik
Star+

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Basierend auf Stern-Netzmodell:
  Multipin-Netz wird ersetzt durch fiktiven Knoten und alle Pins verbinden zu diesem
- Fast lineare Funktion

Sternmetrik
Star+

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Basierend auf Stern-Netzmodell:
  Multipin-Netz wird ersetzt durch fiktiven Knoten und alle Pins verbinden zu diesem
- Fast lineare Funktion
- Schnell: Nach Zügen ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich

Sternmetrik
Star+

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Basierend auf Stern-Netzmodell:
  Multipin-Netz wird ersetzt durch fiktiven Knoten und alle Pins verbinden zu diesem
- Fast lineare Funktion
- Schnell: Nach Zügen ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich
- Schwerpunkt x_g für Netz l mit k_l Blocks
  $x_g := \frac{1}{k_l} \sum_{i \in Netz_l} x_i$
  $||Netz_l||_x := \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi}$
  ϕ Konstante > 0, so dass es immer diff'bar
  γ Faktor zur Kompensation von Unterschätzung

Sternmetrik
Star+

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Basierend auf Stern-Netzmodell:
  Multipin-Netz wird ersetzt durch fiktiven Knoten und alle Pins verbinden zu diesem
- Fast lineare Funktion
- Schnell: Nach Zügen ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich
- Schwerpunkt x_g für Netz l mit k_l Blocks
  $x_g := \frac{1}{k_l} \sum_{i \in Netz_l} x_i$
  $||Netz_l||_x := \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi}$
  ϕ Konstante > 0, so dass es immer diff'bar
  γ Faktor zur Kompensation von Unterschätzung
- y-Koordinate analog

Sternmetrik
Star+

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Basierend auf Stern-Netzmodell:
  Multipin-Netz wird ersetzt durch fiktiven Knoten und alle Pins verbinden zu diesem
- Fast lineare Funktion
- Schnell: Nach Zügen ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich
- Schwerpunkt x_g für Netz l mit k_l Blocks
  $x_g := \frac{1}{k_l} \sum_{i \in Netz_l} x_i$
  $||Netz_l||_x := \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi}$
  ϕ Konstante > 0, so dass es immer diff'bar
  γ Faktor zur Kompensation von Unterschätzung
- y-Koordinate analog
- Unterschied zu normalem Stern-Modell: $\sqrt{\ldots + \phi}$

StarPlace
Star+ $\mathcal{O}(1)$-Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schnell: Nach Veränderung von einzelnen Positionen ist ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi} = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} x_i^2 - k_l x_g^2 + \phi}$$

StarPlace
Star+ $\mathcal{O}(1)$-Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schnell: Nach Veränderung von einzelnen Positionen ist ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi} = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} x_i^2 - k_l x_g^2 + \phi}$$

StarPlace
Star+ $\mathcal{O}(1)$-Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schnell: Nach Veränderung von einzelnen Positionen ist ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi} = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} x_i^2 - k_l x_g^2 + \phi}$$

$U_l := \sum_{i \in Netz_l} x_i^2$, $V_l := \sum_{i \in Netz_l} x_i = k_l x_g$

StarPlace
Star+ $\mathcal{O}(1)$-Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schnell: Nach Veränderung von einzelnen Positionen ist ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi} = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} x_i^2 - k_l x_g^2 + \phi}$$

$U_l := \sum_{i \in Netz_l} x_i^2$, $V_l := \sum_{i \in Netz_l} x_i = k_l x_g$

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{U_l - \frac{V_l^2}{k_l} + \phi}$$

StarPlace
Star+ $\mathcal{O}(1)$-Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schnell: Nach Veränderung von einzelnen Positionen ist ein Update in $\mathcal{O}(1)$ möglich

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} (x_i - x_g)^2 + \phi} = \gamma \sqrt{\sum_{i \in Netz_l} x_i^2 - k_l x_g^2 + \phi}$$

$U_l := \sum_{i \in Netz_l} x_i^2$, $V_l := \sum_{i \in Netz_l} x_i = k_l x_g$

$$||Netz_l||_x = \gamma \sqrt{U_l - \frac{V_l^2}{k_l} + \phi}$$

Block $b \in Netz_l$ wird bewegt, dann Update in $\mathcal{O}(1)$

$$U_l^{new} = U_l - x_b^2 + (x_b^{new})^2$$
$$V_l^{new} = V_l - x_b + x_b^{new}$$

Verbesserung der Kostenfunktion
Gewichtete Netzkosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Jedes Netz gleich behandelt

Verbesserung der Kostenfunktion
Gewichtete Netzkosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Jedes Netz gleich behandelt
- Gesamtkosten = $\sum$ Netzkosten

Verbesserung der Kostenfunktion
Gewichtete Netzkosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Jedes Netz gleich behandelt
- Gesamtkosten = $\sum$ Netzkosten
- Verbesserung: Gewichtung einzelner Teilnetze bzgl. bestimmter (anderer) Optimierungsziele

Verbesserung der Kostenfunktion
Gewichtete Netzkosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Jedes Netz gleich behandelt
- Gesamtkosten = $\sum$ Netzkosten
- Verbesserung: Gewichtung einzelner Teilnetze bzgl. bestimmter (anderer) Optimierungsziele
- Nun: Gesamtkosten = $\sum c_i(...) \cdot$ Netzkosten

Verbesserung der Kostenfunktion
Gewichtete Netzkosten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Jedes Netz gleich behandelt
- Gesamtkosten = $\sum$ Netzkosten
- Verbesserung: Gewichtung einzelner Teilnetze bzgl. bestimmter (anderer) Optimierungsziele
- Nun: Gesamtkosten = $\sum c_i(...) \cdot$ Netzkosten
- Gewicht für jedes Netz muß seperat bestimmt/berechnet werden

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung
    - Bei nicht exponentieller Laufzeit

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung
    - Bei nicht exponentieller Laufzeit
  - Einige exakte mathematische Optimierungsalgorithmen:

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung
    - Bei nicht exponentieller Laufzeit
  - Einige exakte mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Oft vereinfachtes Modell $\Rightarrow$ Nicht exponentielle Laufzeit

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung
    - Bei nicht exponentieller Laufzeit
  - Einige exakte mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Oft vereinfachtes Modell $\Rightarrow$ Nicht exponentielle Laufzeit
    - Nur für sehr kleine Problemgrößen (bei NP-Vollständigen Algorithmen)

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung
    - Bei nicht exponentieller Laufzeit
  - Einige exakte mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Oft vereinfachtes Modell $\Rightarrow$ Nicht exponentielle Laufzeit
    - Nur für sehr kleine Problemgrößen (bei NP-Vollständigen Algorithmen)
- Später:

Optimierungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Im folgenden
  - Beispiel: Abstraktes vereinfachtes Platzierungsproblem (UPP)
  - Einige heuristische mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Zur Lösung der NP-Vollständigen Probleme
    - Bestimmung einer nicht optimalen (aber hoffentlich guten) Lösung
    - Bei nicht exponentieller Laufzeit
  - Einige exakte mathematische Optimierungsalgorithmen:
    - Oft vereinfachtes Modell $\Rightarrow$ Nicht exponentielle Laufzeit
    - Nur für sehr kleine Problemgrößen (bei NP-Vollständigen Algorithmen)
- Später:
  - Konkrete Varianten/Implementierungen einzelner Verfahren

Beispielanwendung
Unit-Size Placement Problem (UPP)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eingabe

- 1×1 Zellen
- Netzliste

Beispielanwendung
Unit-Size Placement Problem (UPP)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eingabe

- 1×1 Zellen
- Netzliste

Platziere Zellen

- Auf 1×1 Raster
- Überlappungsfrei

Beispielanwendung
Unit-Size Placement Problem (UPP)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eingabe

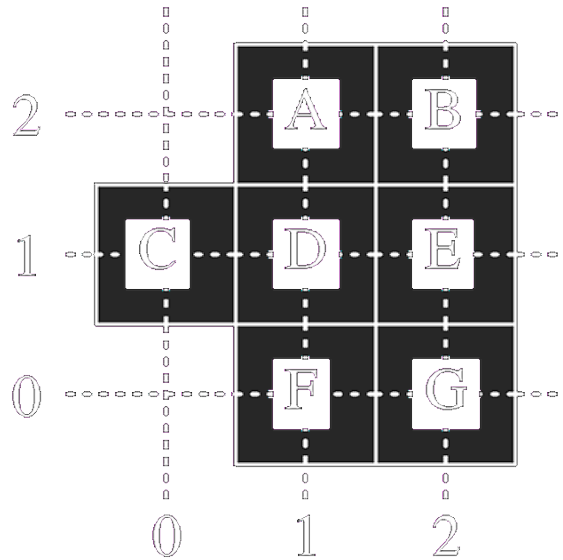
- 1×1 Zellen
- Netzliste

Platziere Zellen

- Auf 1×1 Raster
- Überlappungsfrei

Minimiere Fläche

- Platz für Verdrahtung



n_1: A, B, F, G

n_2: B, E

n_3: D, E

n_4: A, C, D

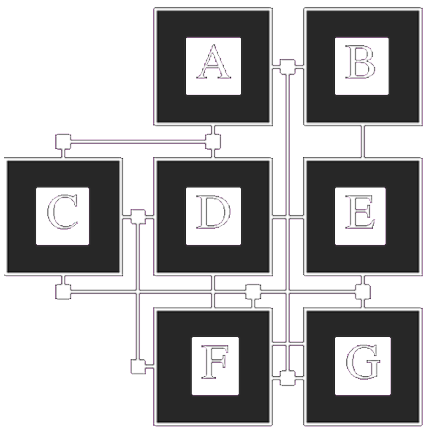
n_5: C, D, F

n_6: C, E, F, G

n_7: D, F

n_8: F, G

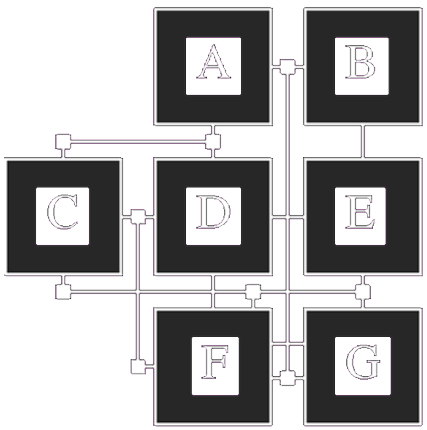
UPP



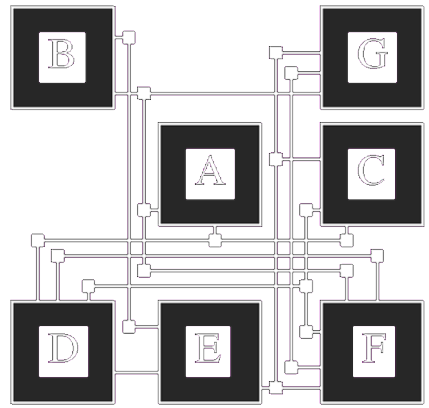
Gute Platzierung mit Verdrahtung

UPP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

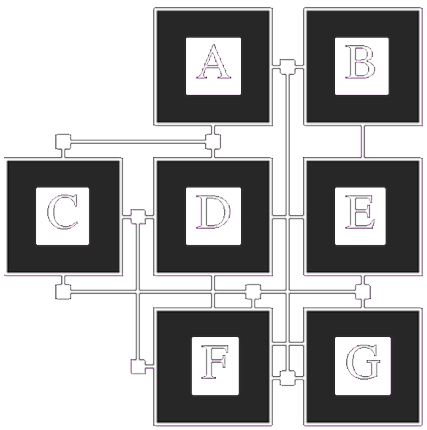


Gute Platzierung mit Verdrahtung

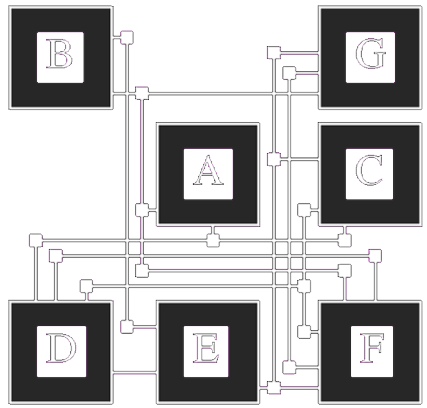


Schlechte Platzierung
Mehr Verdrahtungsspuren

UPP



Gute Platzierung mit Verdrahtung



Schlechte Platzierung
Mehr Verdrahtungsspuren

Problem: Bestimmung der Qualität

- Komplette Verdrahtung dauert zu lange
- Abschätzen

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte
    - Algorithmus könnte beliebig beendet werden

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte
    - Algorithmus könnte beliebig beendet werden

    $\Rightarrow$ Hat ggf. nur eine schlechtere Lösung

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte
    - Algorithmus könnte beliebig beendet werden
    - $\Rightarrow$ Hat ggf. nur eine schlechtere Lösung
  - Unvollständige Lösung

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte
    - Algorithmus könnte beliebig beendet werden

    $\Rightarrow$ Hat ggf. nur eine schlechtere Lösung
  - Unvollständige Lösung
    - Einige/Alle Unbekannte sind noch unbestimmt oder ungültig

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte
    - Algorithmus könnte beliebig beendet werden
    - $\Rightarrow$ Hat ggf. nur eine schlechtere Lösung
  - Unvollständige Lösung
    - Einige/Alle Unbekannte sind noch unbestimmt oder ungültig
    - Algorithmus muß weiter rechnen

Heuristische Optimierungsalgorithmen
Darstellung einer *Lösung*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problemspezifisch
- Algorithmusspezifisch
- Grundsätzlich unterscheidbar
  - Vollständige Lösung
    - Alle Unbekannten haben (immer) gültige Werte
    - Algorithmus könnte beliebig beendet werden

    $\Rightarrow$ Hat ggf. nur eine schlechtere Lösung
  - Unvollständige Lösung
    - Einige/Alle Unbekannte sind noch unbestimmt oder ungültig
    - Algorithmus muß weiter rechnen

    $\Rightarrow$ Bei vorzeitiger Beendigung gar keine Lösung

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$
- Lösung $\vec{f} \in F : \vec{f} = [f_1, ... f_n]^T$

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$
- Lösung $\vec{f} \in F : \vec{f} = [f_1, ... f_n]^T$
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche der f_i

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$
- Lösung $\vec{f} \in F : \vec{f} = [f_1, ... f_n]^T$
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche der f_i
  - Implitizite Einschränkunge: Abhängigkeiten

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$
- Lösung $\vec{f} \in F : \vec{f} = [f_1, ... f_n]^T$
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche der f_i
  - Implitizite Einschränkunge: Abhängigkeiten
- Teillösung $\vec{f}$

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$
- Lösung $\vec{f} \in F : \vec{f} = [f_1, ... f_n]^T$
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche der f_i
  - Implitizite Einschränkunge: Abhängigkeiten
- Teillösung $\vec{f}$
  - Einige f_i undefiniert

Lösungsdefintion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Probleminstanz $I = (F, c)$
  - Lösungsraum F
  - Kostenfuntion $c : F \mapsto \mathbf{R}$
- Lösung $\vec{f} \in F : \vec{f} = [f_1, ... f_n]^T$
  - Explizite Einschränkungen: Wertebereiche der f_i
  - Implitizite Einschränkunge: Abhängigkeiten
- Teillösung $\vec{f}$
  - Einige f_i undefiniert
  - Spannt Unterraum von F auf

Nachbarsuche
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Starte mit einer vollständigen Lösung

Nachbarsuche
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Starte mit einer vollständigen Lösung
- Bestimme *Nachbarn* der Lösung

Nachbarsuche
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Starte mit einer vollständigen Lösung
- Bestimme *Nachbarn* der Lösung
  - Andere Lösungen *nahe* an existierender

Nachbarsuche
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Starte mit einer vollständigen Lösung
- Bestimme *Nachbarn* der Lösung
  - Andere Lösungen *nahe* an existierender
  - Definition von *Nähe* ist problemspezifisch

Nachbarsuche
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Starte mit einer vollständigen Lösung
- Bestimme *Nachbarn* der Lösung
  - Andere Lösungen *nahe* an existierender
  - Definition von *Nähe* ist problemspezifisch
- Wähle *besseren* Nachbarn aus

Nachbarsuche
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Starte mit einer vollständigen Lösung
- Bestimme *Nachbarn* der Lösung
  - Andere Lösungen *nahe* an existierender
  - Definition von *Nähe* ist problemspezifisch
- Wähle *besseren* Nachbarn aus
- Wiederhole

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$
- Nachbarschaft $N : F \mapsto 2^F$
  (2^F Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von F)

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$
- Nachbarschaft $N : F \mapsto 2^F$
  (2^F Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von F)
- Nachbar $\vec{g} \in N(\vec{f})$

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$
- Nachbarschaft $N : F \mapsto 2^F$
  (2^F Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von F)
- Nachbar $\vec{g} \in N(\vec{f})$

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$
- Nachbarschaft $N : F \mapsto 2^F$
  (2^F Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von F)
- Nachbar $\vec{g} \in N(\vec{f})$

Beispiel UPP

- $\vec{g}$ ist Nachbar von $\vec{f} :\Leftrightarrow \vec{g}$ ergibt sich durch Vertauschung von 2 Zellen von $\vec{f}$.

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$
- Nachbarschaft $N : F \mapsto 2^F$
  (2^F Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von F)
- Nachbar $\vec{g} \in N(\vec{f})$

Beispiel UPP

- $\vec{g}$ ist Nachbar von $\vec{f} :\Leftrightarrow \vec{g}$ ergibt sich durch Vertauschung von 2 Zellen von $\vec{f}$.
- n Zellen, $n-1$ Tauschpartner $\Rightarrow \left|N(\vec{f})\right| = \frac{n(n-1)}{2}$

Nachbarsuche
Formal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem $I = (F, c)$
- Lösung $\vec{f} \in F$
- Nachbarschaft $N : F \mapsto 2^F$
  (2^F Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von F)
- Nachbar $\vec{g} \in N(\vec{f})$

Beispiel UPP

- $\vec{g}$ ist Nachbar von $\vec{f} :\Leftrightarrow \vec{g}$ ergibt sich durch Vertauschung von 2 Zellen von $\vec{f}$.
- n Zellen, $n-1$ Tauschpartner $\Rightarrow \left|N(\vec{f})\right| = \frac{n(n-1)}{2}$
- Komplexere *Züge* möglich
  z.B. tausche 3 Zellen, tausche Regionen, ...

Nachbarsuche
Kandidatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Welches $\vec{g} \in N(\vec{f})$ wählen?
- Ziel: Kostenreduzierung bezüglich c
- Also wähle $\vec{g}$ mit $c(\vec{g}) < c(\vec{f})$
- Ende mit $\vec{f}$ falls $\forall \vec{g} \in N(\vec{f}) : c(\vec{g}) \geq c(\vec{f})$

Nachbarsuche
Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Local_search() : begin
    Feasible_solution f ;
    Set<Feasible_solution> G ;
    f := Initial_solution() ;
    repeat
        G := {g|g ∈ N(f) ∧ c(g) < c(f)} ;
        if G ≠ ∅ then
            f := G.pickany()
    until G = ∅;
    report(f) ;
```

- Initialisierung:

Nachbarsuche
Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Local_search() : begin
    Feasible_solution f ;
    Set<Feasible_solution> G ;
    f := Initial_solution() ;
    repeat
        G := {g|g ∈ N(f) ∧ c(g) < c(f)} ;
        if G ≠ ∅ then
            f := G.pickany()
    until G = ∅;
    report(f) ;
```

- Initialisierung: `Initial_solution`? Zufällig, triviale Lösung
- Strategien: `pickany`?

Nachbarsuche
Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Local_search() : begin
    Feasible_solution f ;
    Set<Feasible_solution> G ;
    f := Initial_solution() ;
    repeat
        G := {g|g ∈ N(f) ∧ c(g) < c(f)} ;
        if G ≠ ∅ then
            f := G.pickany()
    until G = ∅;
    report(f) ;
```

- Initialisierung: `Initial_solution`? Zufällig, triviale Lösung
- Strategien: `pickany`? Erste Verbesserung, Steilster Abstieg

Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:

Nachbarsuche
Probleme

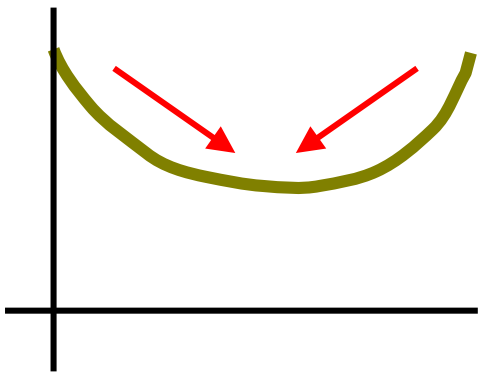
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:

Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:

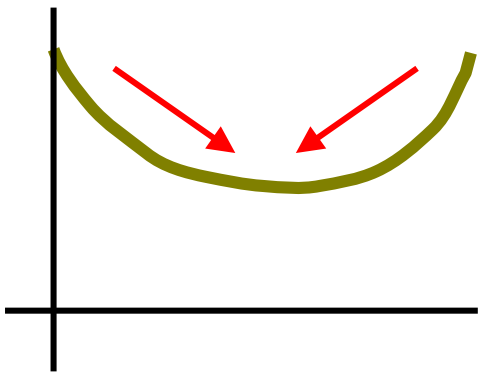


Gut geeignet

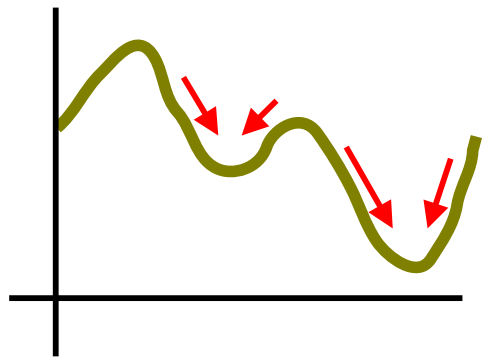
Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:



Gut geeignet

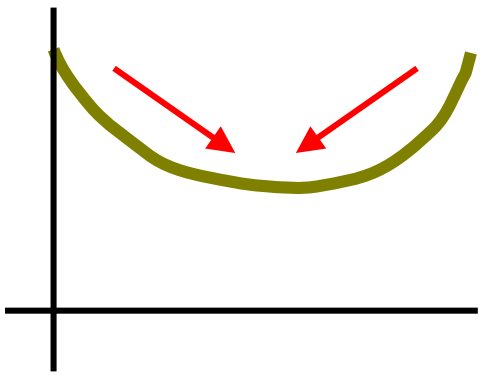


Schlecht geeignet

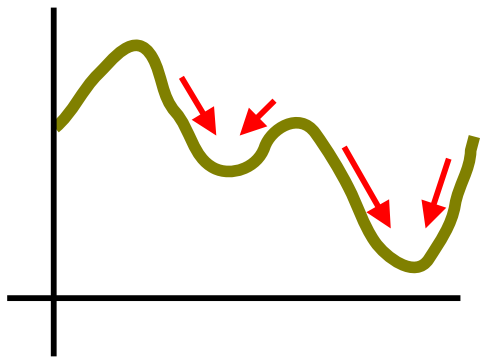
Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:



Gut geeignet



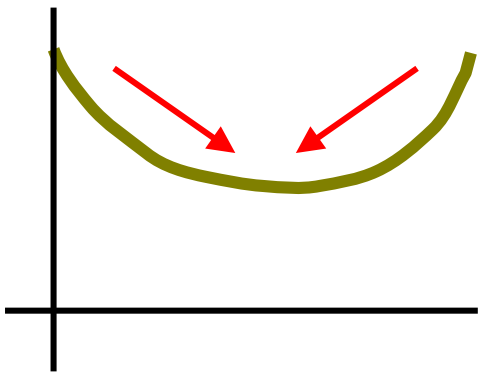
Schlecht geeignet

- Steckenbleiben in lokalen Minima

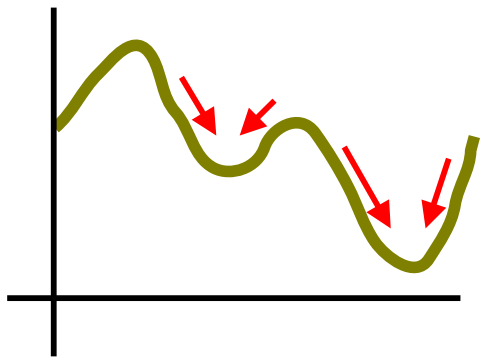
Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:



Gut geeignet



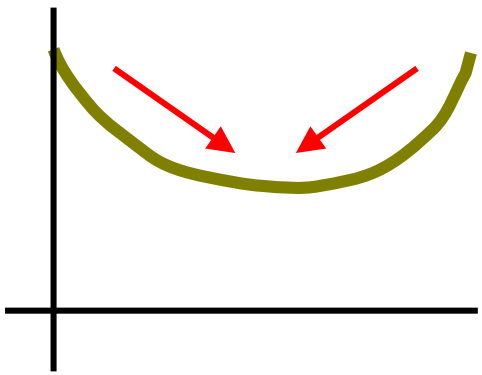
Schlecht geeignet

- Steckenbleiben in lokalen Minima
- Mögliche Lösungen:

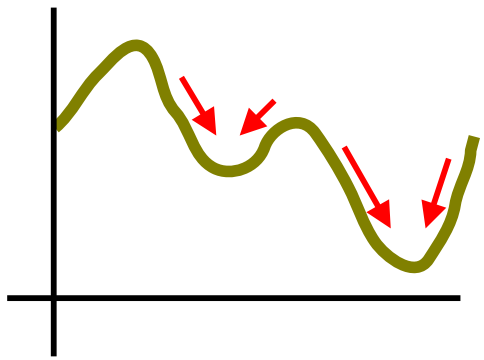
Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:



Gut geeignet



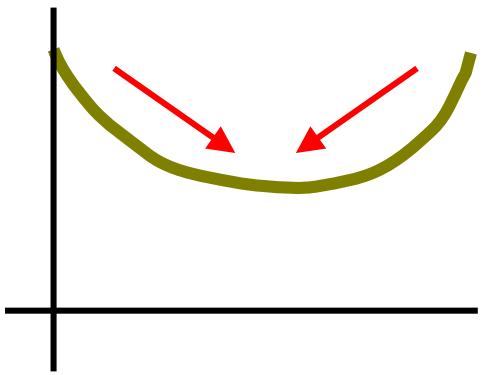
Schlecht geeignet

- Steckenbleiben in lokalen Minima
- Mögliche Lösungen:
  - Mehrere Läufe mit anderen Startlösungen

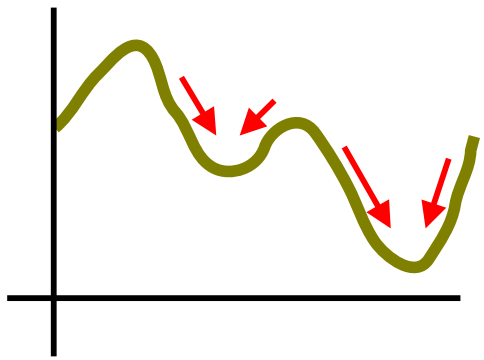
Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:



Gut geeignet



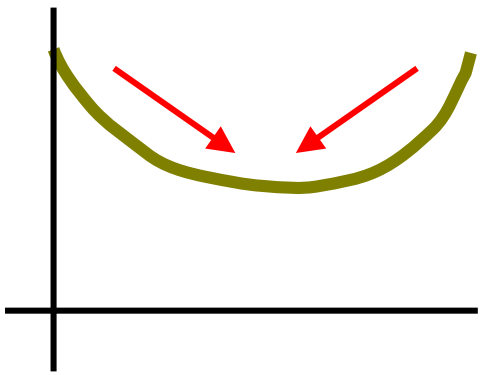
Schlecht geeignet

- Steckenbleiben in lokalen Minima
- Mögliche Lösungen:
  - Mehrere Läufe mit anderen Startlösungen
  - Größere Nachbarschaft

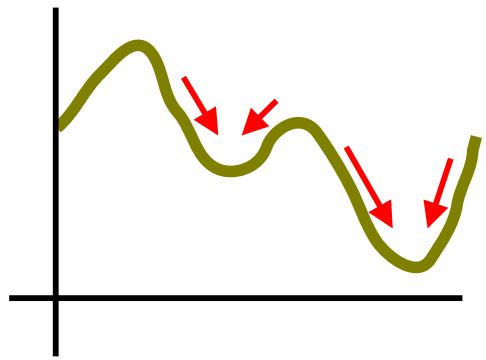
Nachbarsuche
Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *Form* der Kostenfunktion:



Gut geeignet



Schlecht geeignet

- Steckenbleiben in lokalen Minima
- Mögliche Lösungen:
  - Mehrere Läufe mit anderen Startlösungen
  - Größere Nachbarschaft
  - Adaptiere Größe der Nachbarschaft

Simulated Annealing
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aktzeptiere verschlechternde Züge
  Aber bessere Strategie als reiner Zufall

Simulated Annealing
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aktzeptiere verschlechternde Züge
  Aber bessere Strategie als reiner Zufall
- Simulated Annealing

Simulated Annealing
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aktzeptiere verschlechternde Züge
  Aber bessere Strategie als reiner Zufall
- Simulated Annealing
  - Simuliertes Erstarren von Metallen

Simulated Annealing
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aktzeptiere verschlechternde Züge
  Aber bessere Strategie als reiner Zufall
- Simulated Annealing
  - Simuliertes Erstarren von Metallen
  - Inspirriert von physikalischen Erstarrungsprozessen

Simulated Annealing
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aktzeptiere verschlechternde Züge
  Aber bessere Strategie als reiner Zufall
- Simulated Annealing
  - Simuliertes Erstarren von Metallen
  - Inspirriert von physikalischen Erstarrungsprozessen
    - Schnelles Erstarren (*Schockfrosten*)
      Hohe innere Spannung = hohe innere Energie

Simulated Annealing
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aktzeptiere verschlechternde Züge
  Aber bessere Strategie als reiner Zufall
- Simulated Annealing
  - Simuliertes Erstarren von Metallen
  - Inspirriert von physikalischen Erstarrungsprozessen
    - Schnelles Erstarren (*Schockfrosten*)
      Hohe innere Spannung = hohe innere Energie
    - Langsames Abkühlen Niedrige innere Spannung = niedrige innere Energie

Simulated Annealing
Physikalischer Hintergrund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hohe Anfangstemperatur (flüssiges Material)

Simulated Annealing
Physikalischer Hintergrund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hohe Anfangstemperatur (flüssiges Material)
- Moleküle können sich frei anordnen

Simulated Annealing
Physikalischer Hintergrund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hohe Anfangstemperatur (flüssiges Material)
- Moleküle können sich frei anordnen
- Langsames Abkühlen

Simulated Annealing
Physikalischer Hintergrund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hohe Anfangstemperatur (flüssiges Material)
- Moleküle können sich frei anordnen
- Langsames Abkühlen
- Bewegungsfreiheit wird schrittweise weiter eingeschränkt

Simulated Annealing
Physikalischer Hintergrund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hohe Anfangstemperatur (flüssiges Material)
- Moleküle können sich frei anordnen
- Langsames Abkühlen
- Bewegungsfreiheit wird schrittweise weiter eingeschränkt
- Moleküle ordnen sich in Konfiguration niedrigster Energie an

Simulated Annealing
Physikalischer Hintergrund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hohe Anfangstemperatur (flüssiges Material)
- Moleküle können sich frei anordnen
- Langsames Abkühlen
- Bewegungsfreiheit wird schrittweise weiter eingeschränkt
- Moleküle ordnen sich in Konfiguration niedrigster Energie an
- Am besten bei sehr langsamer Abkühlung

Simulated Annealing für die Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie entspricht Kostenfunktion

Simulated Annealing für die Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie entspricht Kostenfunktion
- Bewegung der Moleküle entspricht Zügen

Simulated Annealing für die Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie entspricht Kostenfunktion
- Bewegung der Moleküle entspricht Zügen
- Temperatur entspricht Kontrollparameter T

Simulated Annealing für die Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie entspricht Kostenfunktion
- Bewegung der Moleküle entspricht Zügen
- Temperatur entspricht Kontrollparameter T
  - Wie frei dürfen sich Moleküle bewegen?
    = Welche Züge sind noch akzeptabel?

Simulated Annealing für die Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie entspricht Kostenfunktion
- Bewegung der Moleküle entspricht Zügen
- Temperatur entspricht Kontrollparameter T
  - Wie frei dürfen sich Moleküle bewegen?
    = Welche Züge sind noch akzeptabel?
  - Niedrigere Energie/Kosten: Immer akzeptiert
    $c(\vec{g}) \leq c(\vec{f})$

Simulated Annealing für die Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie entspricht Kostenfunktion
- Bewegung der Moleküle entspricht Zügen
- Temperatur entspricht Kontrollparameter T
  - Wie frei dürfen sich Moleküle bewegen?
    = Welche Züge sind noch akzeptabel?
  - Niedrigere Energie/Kosten: Immer akzeptiert
    $c(\vec{g}) \leq c(\vec{f})$
  - Höhere Energie/Kosten:
    Akzeptiert mit Wahrscheinlichkeit $e^{\frac{-\Delta c}{T}}$ mit $\Delta c = c(\vec{g}) - c(\vec{f})$

Simulated Annealing
Temperatur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$e^{\frac{-\Delta c}{T}} = \frac{1}{e^{\frac{\Delta c}{T}}}$$

- Hohe Temperaturen
  Akzeptiere fast alle schlechten Züge

Simulated Annealing
Temperatur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$e^{\frac{-\Delta c}{T}} = \frac{1}{e^{\frac{\Delta c}{T}}}$$

- Hohe Temperaturen
  Akzeptiere fast alle schlechten Züge
- Niedrige Temperaturen
  Akzeptiere fast keine schlechten Züge mehr

Simulated Annealing
Temperatur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$e^{\frac{-\Delta c}{T}} = \frac{1}{e^{\frac{\Delta c}{T}}}$$

- Hohe Temperaturen
  Akzeptiere fast alle schlechten Züge
- Niedrige Temperaturen
  Akzeptiere fast keine schlechten Züge mehr
- Physik: Boltzmann-Verteilung
  Statistische Mechanik

Simulated Annealing Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Simulated_annealing(): begin
    Feasible_solution f, g, bsf ;
    float T ;
    T := Initial_temperature() ;
    f := Initial_solution() ;
    bsf := f ;
    repeat
        repeat
            g := N(f).pickany() ;
            if Accept(f, g) then  f := g ;
        until Thermal_equilibrium(T);
        T := New_temperature(T) ;
    until Stop();
    report(bsf) ;
```

```
int Accept(Feasible_solution f, g):
begin
    float DeltaC ;
    DeltaC := c(g) - c(f) ;
    if DeltaC ≤ 0 then
        if c(g) < c(bsf) then  bsf := g ;
        return (1);
    else
        return (exp(-DeltaC/T) >
        random(1))
```

Simulated Annealing
Zusätzliche Funktionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Initial_temperature()

Bestimmt ausreichend hohe Starttemperatur

Initial_solution()

- Bestimmt Startlösung
- Zufällige, aber gültige Lösung OK!

Thermal_equilibrium()

Gleichgewicht auf einer Temperaturstufe

New_temperature()

Bestimmt nächsten Temperaturschritt

Stop()

Abbruchkriterium

BSF: *Best so far*

- Beste bisherige Lösung
- Letzte Lösung ist nicht immer die beste!

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)
- Viele Variationsmöglichkeiten

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)
- Viele Variationsmöglichkeiten
  - stop() abhängig von accept()

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)
- Viele Variationsmöglichkeiten
  - stop() abhängig von accept()
  - Adaptive Cooling Schedules

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)
- Viele Variationsmöglichkeiten
  - stop() abhängig von accept()
  - Adaptive Cooling Schedules
- Bibliotheken: ASA, EBSA

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)
- Viele Variationsmöglichkeiten
  - stop() abhängig von accept()
  - Adaptive Cooling Schedules
- Bibliotheken: ASA, EBSA
- SA ist allgemein verwendbar

Simulated Annealing

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei geeigneter Cooling Schedule
  - SA findet immer die optimale Lösung
  - Praktisch aber nicht relevant (zu langsam)
- Viele Variationsmöglichkeiten
  - stop() abhängig von accept()
  - Adaptive Cooling Schedules
- Bibliotheken: ASA, EBSA
- SA ist allgemein verwendbar
- Aber: Spezialisierte Lösungen sind besser

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!
  - Problem: Zyklen

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!
  - Problem: Zyklen
    - Ständige Wiederholung der letzten Züge

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!
  - Problem: Zyklen
    - Ständige Wiederholung der letzten Züge
- Lösung: Verbiete letzten k Lösungen

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!
  - Problem: Zyklen
    - Ständige Wiederholung der letzten Züge
- Lösung: Verbiete letzten k Lösungen
  - Lösungen sind als *tabu* markiert

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!
  - Problem: Zyklen
    - Ständige Wiederholung der letzten Züge
- Lösung: Verbiete letzten k Lösungen
  - Lösungen sind als *tabu* markiert
  - Vermeidet Zyklen bis zu der Länge k

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Simulated Annealing
  - Verschlechternde Züge zu Beginn akzeptiert
- Tabu-Suche (TS)
  - Verschlechternde Züge werden immer akzeptiert
  - Gehe immer zu $\vec{g} \in N(\vec{f})$ mit $c(\vec{g}) = \min_{\vec{h} \in N(\vec{f})} c(\vec{h})$
  - Auch wenn $c(\vec{g}) > c(\vec{f})$!
  - Problem: Zyklen
    - Ständige Wiederholung der letzten Züge
- Lösung: Verbiete letzten k Lösungen
  - Lösungen sind als *tabu* markiert
  - Vermeidet Zyklen bis zu der Länge k
  - Realsierung: FIFO mit Lösungen der Länge k

Tabu-Suche
Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Tabu_search(): begin
    Feasible_solution f, g, bsf ;
    Set<Feasible_solution> G ;
    FIFO<Feasible_solution,k> Q ;
    f := Initial_solution(); bsf := f; Q := ∅ ;
    repeat
        G := {s|s ∈ N(f) ∧ s ∉ Q} ;
        if G ≠ ∅ then
            g := G.findmin(c) ;
            Q.shiftin(g) ;
            f := g ;
            if c(f) < c(bsf) then bsf := f;
    until (G ≠ ∅) or Stop();
    report(bsf);
```

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare
- Sehr große Tabu-Liste

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare
- Sehr große Tabu-Liste
- Abhilfe: Setze nur einzelne Züge Tabu

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare
- Sehr große Tabu-Liste
- Abhilfe: Setze nur einzelne Züge Tabu
- Aber: Einschränkung des Lösungsraumes

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare
- Sehr große Tabu-Liste
- Abhilfe: Setze nur einzelne Züge Tabu
- Aber: Einschränkung des Lösungsraumes

- Viele Variationsmöglichkeiten

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare
- Sehr große Tabu-Liste
- Abhilfe: Setze nur einzelne Züge Tabu
- Aber: Einschränkung des Lösungsraumes

- Viele Variationsmöglichkeiten
  - Kein theoretischer Hintergrund Erreichen des Optimums?

Tabu-Suche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- stop()
  Keine Verbesserung in den letzten k Zügen

UPP-Beispiel

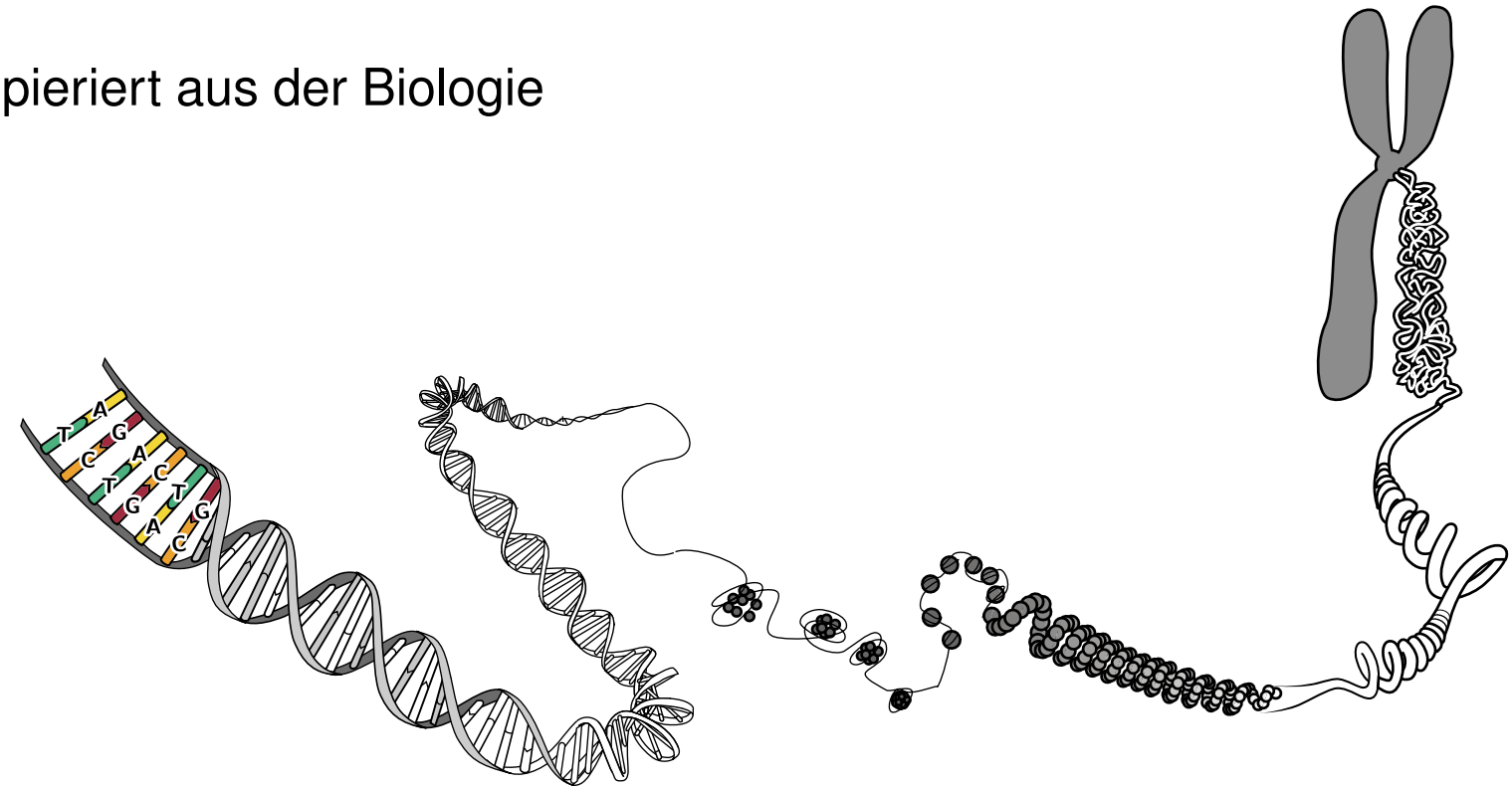
- 10.000 Zellen Lösung beschreibt 10.000 Koordinatenpaare
- Sehr große Tabu-Liste
- Abhilfe: Setze nur einzelne Züge Tabu
- Aber: Einschränkung des Lösungsraumes

- Viele Variationsmöglichkeiten
  - Kein theoretischer Hintergrund Erreichen des Optimums?
  - Wie stop() oder k wählen?

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Inspiriert aus der Biologie

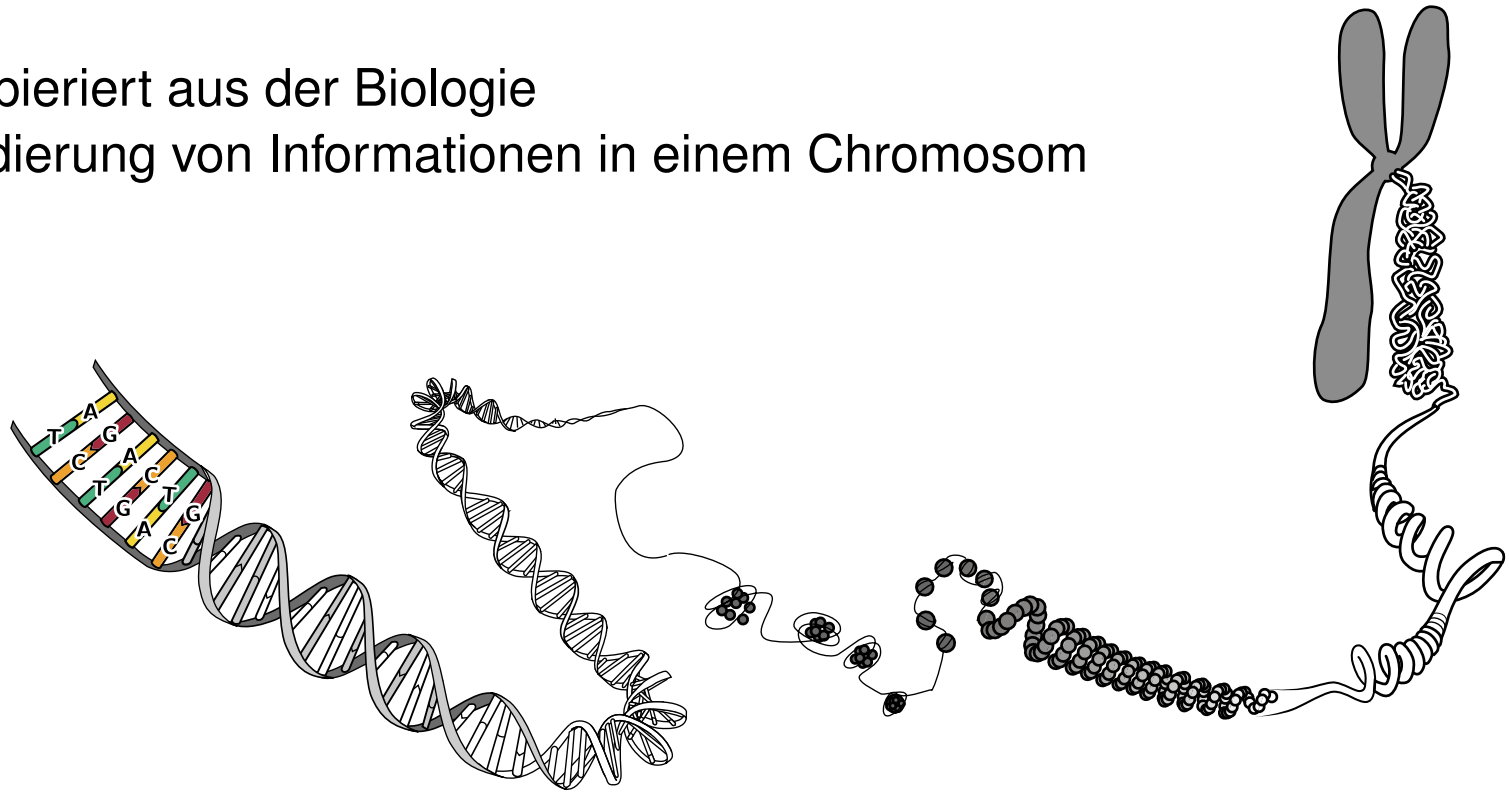


Basiert auf einem Bild der NIH

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Inspiriert aus der Biologie
- Kodierung von Informationen in einem Chromosom

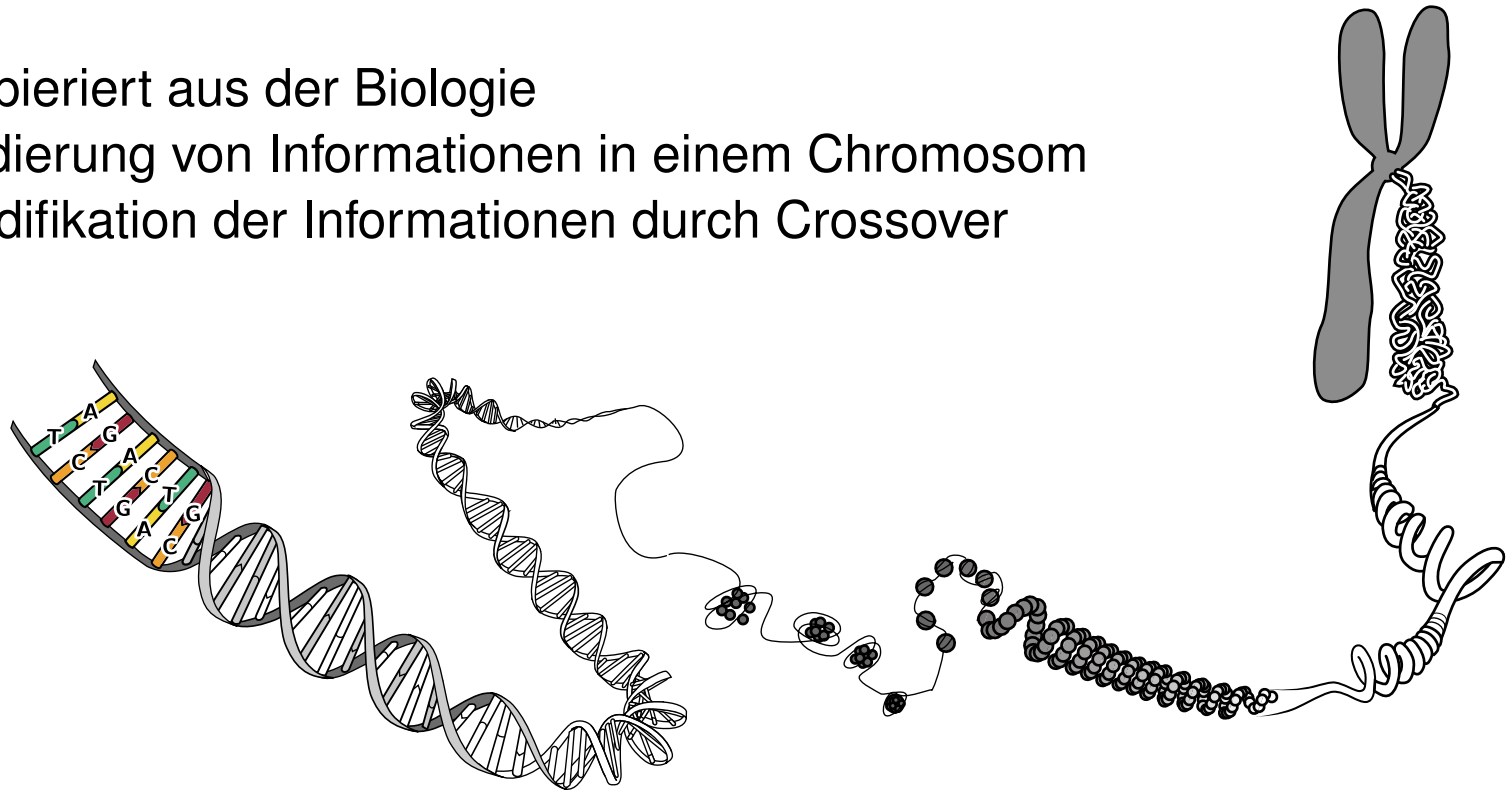


Basiert auf einem Bild der NIH

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Inspiriert aus der Biologie
- Kodierung von Informationen in einem Chromosom
- Modifikation der Informationen durch Crossover



Basiert auf einem Bild der NIH

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen
  - Menge P von Lösungen: Population

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen
  - Menge P von Lösungen: Population
  - Iterationszähler k: Generation

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen
  - Menge P von Lösungen: Population
  - Iterationszähler k: Generation
  - Ersetze $P^{(k)}$ durch $P^{(k+1)}$ während Optimierung

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen
  - Menge P von Lösungen: Population
  - Iterationszähler k: Generation
  - Ersetze $P^{(k)}$ durch $P^{(k+1)}$ während Optimierung
- Bestimmung von $\vec{f}^{(k+1)} \in P^{(k+1)}$ mittels

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen
  - Menge P von Lösungen: Population
  - Iterationszähler k: Generation
  - Ersetze $P^{(k)}$ durch $P^{(k+1)}$ während Optimierung
- Bestimmung von $\vec{f}^{(k+1)} \in P^{(k+1)}$ mittels
  - Crossover von zwei Eltern $\vec{f}^{(k)}, \vec{g}^{(k)} \in P^{(k)}$
    Vererbung von Eigenschaften von $\vec{f}^{(k)}$ und $\vec{g}^{(k)}$

Genetische Algorithmen
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher: Algorithmen arbeiten auf *einer* vollständigen Lösung
- Nun: Gleichzeitig auf *mehreren* Lösungen
  - Menge P von Lösungen: Population
  - Iterationszähler k: Generation
  - Ersetze $P^{(k)}$ durch $P^{(k+1)}$ während Optimierung
- Bestimmung von $\vec{f}^{(k+1)} \in P^{(k+1)}$ mittels
  - Crossover von zwei Eltern $\vec{f}^{(k)}, \vec{g}^{(k)} \in P^{(k)}$
    Vererbung von Eigenschaften von $\vec{f}^{(k)}$ und $\vec{g}^{(k)}$
  - Ggf. Mutation von $\vec{f}^{(k+1)}$

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10×10 Raster

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar
  - 100 $\times$ 8 Bit = 800 Bit lange Bitfolge als Chromosom

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar
  - 100 $\times$ 8 Bit = 800 Bit lange Bitfolge als Chromosom
  - L Länge des Chromosoms in Bit

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar
  - 100 $\times$ 8 Bit = 800 Bit lange Bitfolge als Chromosom
  - L Länge des Chromosoms in Bit

- Wichtige Unterscheidung zwischen

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar
  - 100 $\times$ 8 Bit = 800 Bit lange Bitfolge als Chromosom
  - L Länge des Chromosoms in Bit

- Wichtige Unterscheidung zwischen
  Lösung Biologie: Phänotyp

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar
  - 100 $\times$ 8 Bit = 800 Bit lange Bitfolge als Chromosom
  - L Länge des Chromosoms in Bit

- Wichtige Unterscheidung zwischen
  Lösung Biologie: Phänotyp
  Kodierung der Lösung Biologie: Genotyp

Genetische Algorithmen
Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kodierung für Chromosom
  Bitfolge für Lösungsvektor

UPP Kodierung

- 100 Zellen, 10 $\times$ 10 Raster
  - 4 Bit pro Koordinate
  - 8 Bit pro Koordinatenpaar
  - 100 $\times$ 8 Bit = 800 Bit lange Bitfolge als Chromosom
  - L Länge des Chromosoms in Bit

- Wichtige Unterscheidung zwischen
  Lösung Biologie: Phänotyp
  Kodierung der Lösung Biologie: Genotyp
- Hier im Beispiel äquivalent benutzt

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern
- Verschiedene Realisierungen möglich

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern
- Verschiedene Realisierungen möglich

Beispiel

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern
- Verschiedene Realisierungen möglich

Beispiel

1. Wähle zufällig Crossover-Position $1 \leq r \leq L$

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern
- Verschiedene Realisierungen möglich

Beispiel

1. Wähle zufällig Crossover-Position $1 \leq r \leq L$
2. Kopiere Bits $1 \ldots (r-1)$ aus $\vec{f}^{(k)}$ nach $\vec{f}^{(k+1)}$

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern
- Verschiedene Realisierungen möglich

Beispiel

1. Wähle zufällig Crossover-Position $1 \leq r \leq L$
2. Kopiere Bits $1 \ldots (r-1)$ aus $\vec{f}^{(k)}$ nach $\vec{f}^{(k+1)}$
3. Kopiere Bits $r \ldots L$ aud $\vec{g}^{(k)}$ nach $\vec{f}^{(k+1)}$

Genetische Algorithmen
Vererbung mit dem Crossover-Operator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombiniere die Bitfolgen der Eltern
- Verschiedene Realisierungen möglich

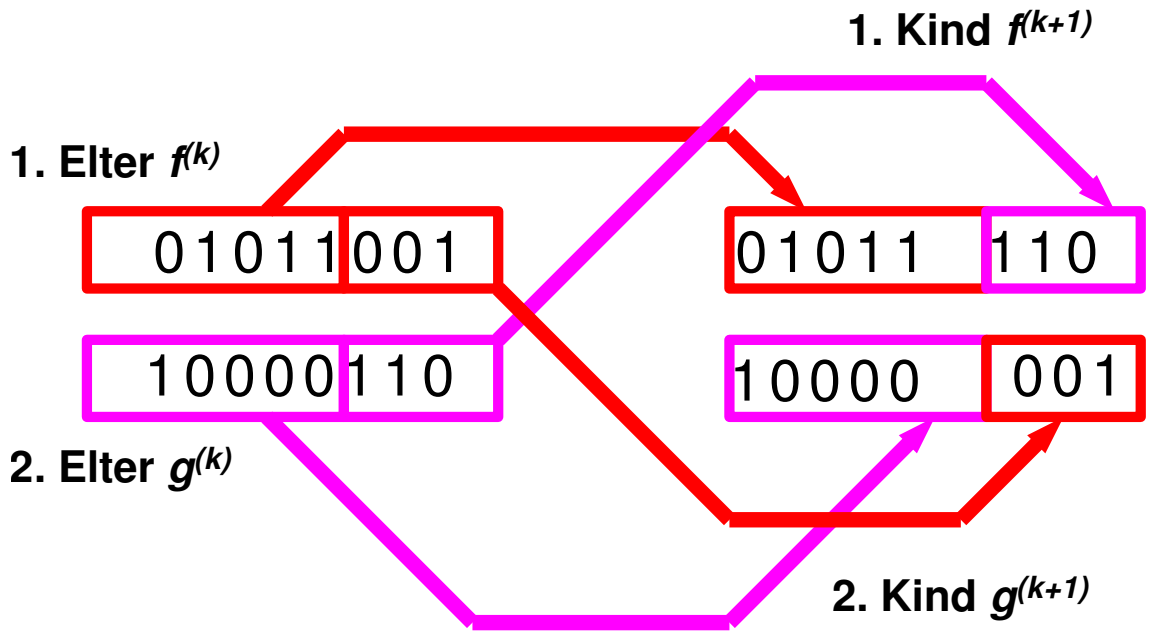
Beispiel

1. Wähle zufällig Crossover-Position $1 \leq r \leq L$
2. Kopiere Bits $1 \ldots (r-1)$ aus $\vec{f}^{(k)}$ nach $\vec{f}^{(k+1)}$
3. Kopiere Bits $r \ldots L$ aud $\vec{g}^{(k)}$ nach $\vec{f}^{(k+1)}$
4. Ggf. erzeuge 2. Kind $\vec{g}^{(k+1)}$ mit vertauschten Rollen

Genetische Algorithmen
Beispiel UPP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10×10 Raster, platziere einzelne Zelle



$r = 6$

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

$\Rightarrow$ Abhilfe: Mehr Struktur als einfache Bitfolge

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

$\Rightarrow$ Abhilfe: Mehr Struktur als einfache Bitfolge

Bei UPP-Beispiel

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

$\Rightarrow$ Abhilfe: Mehr Struktur als einfache Bitfolge

Bei UPP-Beispiel

- Folgen von 4-bit Koordinaten

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

$\Rightarrow$ Abhilfe: Mehr Struktur als einfache Bitfolge

Bei UPP-Beispiel

- Folgen von 4-bit Koordinaten
- Nun zwar intern konsistente Koordinaten

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

$\Rightarrow$ Abhilfe: Mehr Struktur als einfache Bitfolge

Bei UPP-Beispiel

- Folgen von 4-bit Koordinaten
- Nun zwar intern konsistente Koordinaten
- Reicht im allgemeinen Fall aber nicht aus!

Genetische Algorithmen
Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Crossover erzeugt ungültige Lösungen

$\Rightarrow$ Abhilfe: Mehr Struktur als einfache Bitfolge

Bei UPP-Beispiel

- Folgen von 4-bit Koordinaten
- Nun zwar intern konsistente Koordinaten
- Reicht im allgemeinen Fall aber nicht aus!

$\Rightarrow$ Problemspezifisches Crossover

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt
- Bevorzuge gute Lösungen vor schlechten

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt
- Bevorzuge gute Lösungen vor schlechten
  - Wähle *gute* Eltern aus: Niedrige Kosten

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt
- Bevorzuge gute Lösungen vor schlechten
  - Wähle *gute* Eltern aus: Niedrige Kosten
  - Kombiniere gute Eigenschaften in Nachwuchs

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt
- Bevorzuge gute Lösungen vor schlechten
  - Wähle *gute* Eltern aus: Niedrige Kosten
  - Kombiniere gute Eigenschaften in Nachwuchs
  - Aber: Auch Gegenteil möglich (Crossoverposition *r* zufällig)

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt
- Bevorzuge gute Lösungen vor schlechten
  - Wähle *gute* Eltern aus: Niedrige Kosten
  - Kombiniere gute Eigenschaften in Nachwuchs
  - Aber: Auch Gegenteil möglich (Crossoverposition r zufällig)
    - Vererbung schlechter Eigenschaften

Genetische Algorithmen
Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher noch keine Optimierung
  Nur neue Lösungen erzeugt
- Bevorzuge gute Lösungen vor schlechten
  - Wähle *gute* Eltern aus: Niedrige Kosten
  - Kombiniere gute Eigenschaften in Nachwuchs
  - Aber: Auch Gegenteil möglich (Crossoverposition *r* zufällig)
    - Vererbung schlechter Eigenschaften
    - Idee: Schlechte Nachkommen sterben in nächster Generation

Genetische Algorithmen
Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Genetic_Algorithm(int popsize) : begin
    Set<chromosome> pop, newpop ;
    Chromosome parent1, parent2, child ;
    pop := ∅ ;
    for i:=1 . . . popsize do  pop := pop ∪ {Chromosom einer zufälligen Lösung } ;
    repeat
        newpop := ∅ ;
        for i:=1 . . . popsize do
            parent1 := pop.select() ; parent2 := pop.select() ;
            child := crossover(parent1, parent2) ;
            newpop : = newpop ∪ { child };
        pop := newpop;
    until Stop();
    report(pop.findmin(c));
```

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten *m* Iterationen

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten *m* Iterationen
  - *m* problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten
  - Komplexere Crossover (mehrer r,...)

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten
  - Komplexere Crossover (mehrer r,...)
  - Zusätzliche Funktionen: Mutation, Inversion

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten
  - Komplexere Crossover (mehrer r,...)
  - Zusätzliche Funktionen: Mutation, Inversion
  - Mehere Generationen gleichzeitig

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten
  - Komplexere Crossover (mehrer r,...)
  - Zusätzliche Funktionen: Mutation, Inversion
  - Mehere Generationen gleichzeitig
  - Elite-Selektion

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten
  - Komplexere Crossover (mehrer r,...)
  - Zusätzliche Funktionen: Mutation, Inversion
  - Mehere Generationen gleichzeitig
  - Elite-Selektion
  - Meta-Genetische Algorithmen

Genetische Algorithmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- `Stop()`
  - Keine Verbesserung in den letzten m Iterationen
  - m problemspezifischer Parameter
- Mutation
  - Modelliert in Natur aufkommende Fehler beim Kopieren/durch Fremdeinwirkungen
  - Vermeidet Steckenbleiben in lokalen Minima
- Sehr viele Variationsmöglichkeiten
  - Komplexere Crossover (mehrer r,...)
  - Zusätzliche Funktionen: Mutation, Inversion
  - Mehere Generationen gleichzeitig
  - Elite-Selektion
  - Meta-Genetische Algorithmen

  ...

Genetische Algorithmen
Genie (1987)

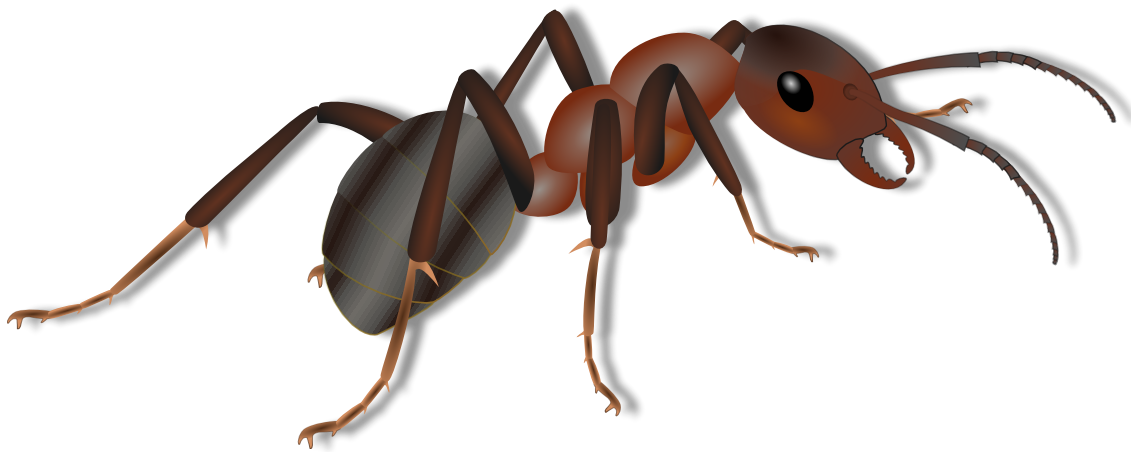
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Stop():	10.000 Generationen ohne Verbesserung der BSF-Lösung
Initiale Population:	Anzahl: Hunderte 25% Zufällig, 75% sequentiell angeordnet
.select():	Zufällig mit Gewichtung auf *fitness* ($< \varnothing$ nie)
Resultat:	Ähnlich gut wie TimberWolf (Tendenziell bessere Ergebnisse auf Kosten der Laufzeit)

Ameisenalgorithmus
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

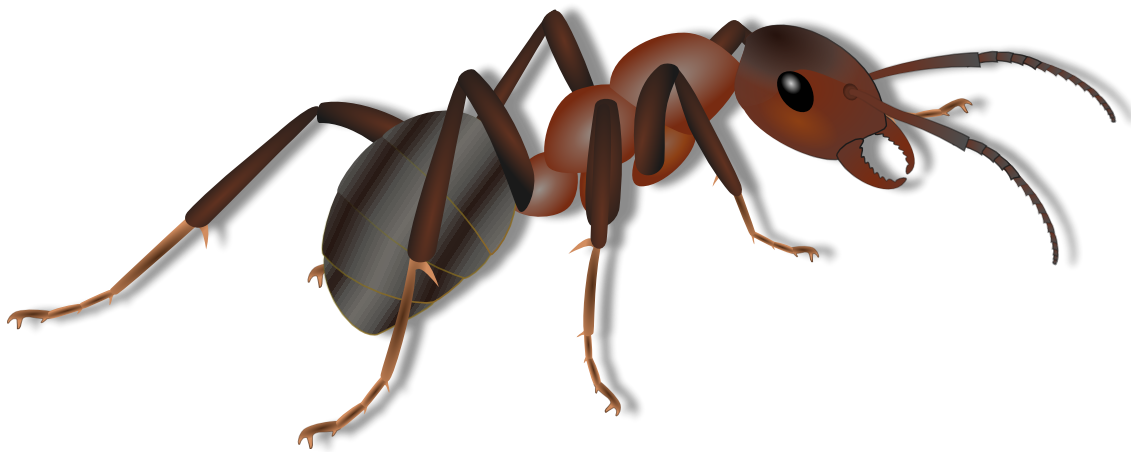
- Inspiriert von Ameisenpfaden



Ameisenalgorithmus
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

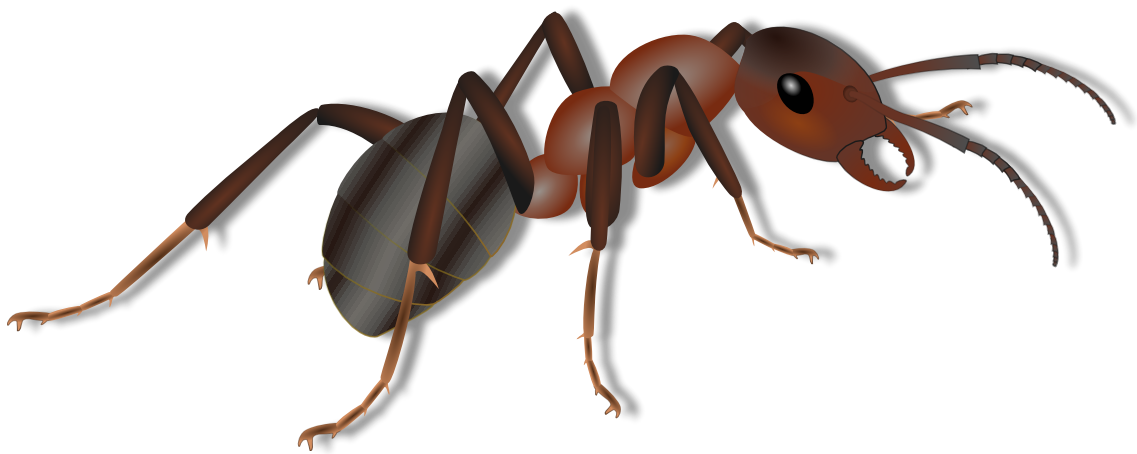
- Inspiriert von Ameisenpfaden
- Ameisen hinterlassen beim marschieren Pheromone



Ameisenalgorithmus
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Inspiriert von Ameisenpfaden
- Ameisen hinterlassen beim marschieren Pheromone
- Kurze Wege akkumulieren stärkere Pheromonkonzentration

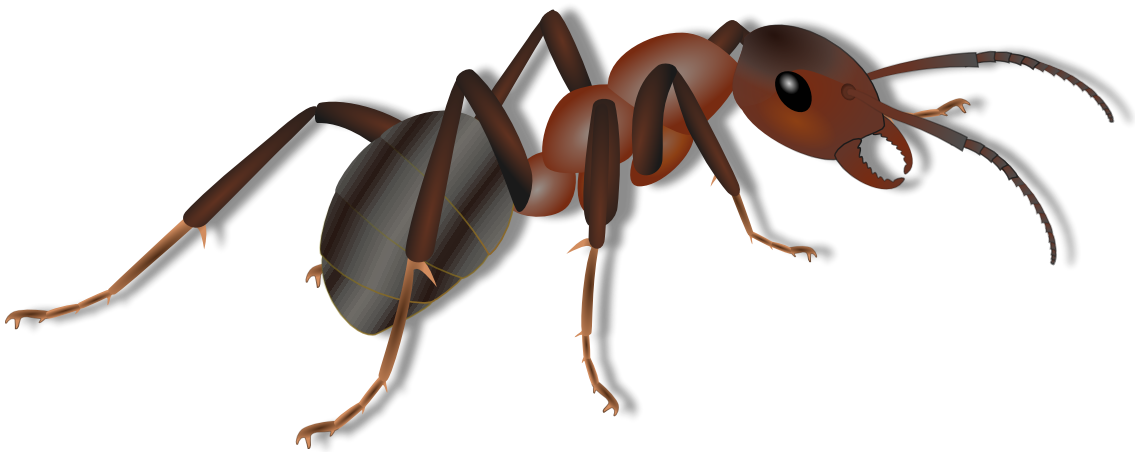


Ameisenalgorithmus
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Inspiriert von Ameisenpfaden
- Ameisen hinterlassen beim marschieren Pheromone
- Kurze Wege akkumulieren stärkere Pheromonkonzentration

$\Rightarrow$ werden entsprechend attraktiver für andere Ameisen



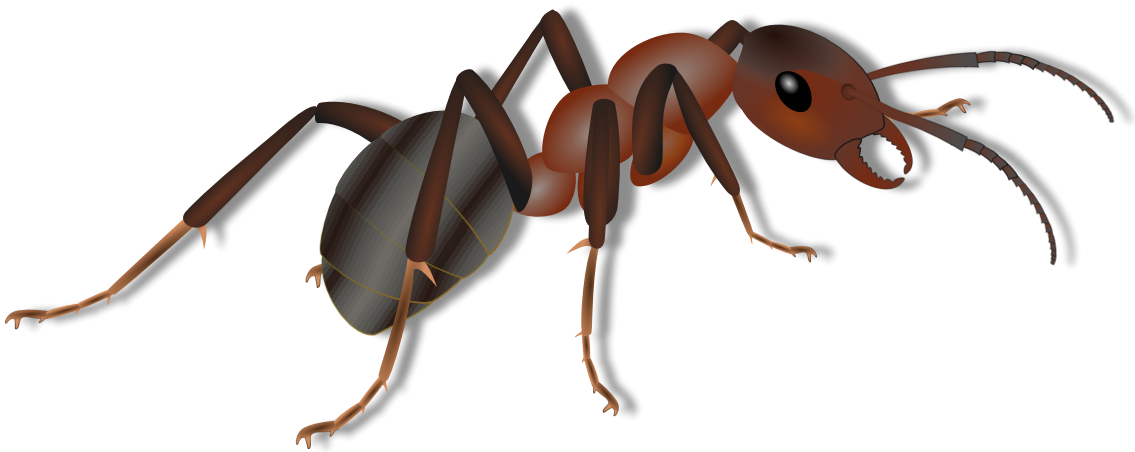
Ameisenalgorithmus
Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Inspiriert von Ameisenpfaden
- Ameisen hinterlassen beim marschieren Pheromone
- Kurze Wege akkumulieren stärkere Pheromonkonzentration

$\Rightarrow$ werden entsprechend attraktiver für andere Ameisen

- Agentenbasierter Ansatz: Finden von besten Wegen im Graph



Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$ Einrichtungen

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$ Einrichtungen

$l \in L$ Orte

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)
$w(f_1, f_2)$	Fluß zwischen zwei Einrichtungen ($w : F \times F \mapsto R$)

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)
$w(f_1, f_2)$	Fluß zwischen zwei Einrichtungen ($w : F \times F \mapsto R$)

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)
$w(f_1, f_2)$	Fluß zwischen zwei Einrichtungen ($w : F \times F \mapsto R$)

Gesucht: Zuordnung $a : F \mapsto L$ bei der $\sum_{f_1, f_2 \in F} w(f_1, f_2) \cdot d(a(f_1), a(f_2))$ minimal wird

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)
$w(f_1, f_2)$	Fluß zwischen zwei Einrichtungen ($w : F \times F \mapsto R$)

Gesucht: Zuordnung $a : F \mapsto L$ bei der $\sum_{f_1, f_2 \in F} w(f_1, f_2) \cdot d(a(f_1), a(f_2))$ minimal wird

- Lösung wird iterativ in jedem *Agenten* (Ameise) aufgebaut

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)
$w(f_1, f_2)$	Fluß zwischen zwei Einrichtungen ($w : F \times F \mapsto R$)

Gesucht: Zuordnung $a : F \mapsto L$ bei der $\sum_{f_1, f_2 \in F} w(f_1, f_2) \cdot d(a(f_1), a(f_2))$ minimal wird

- Lösung wird iterativ in jedem *Agenten* (Ameise) aufgebaut
- Jede Ameise läuft zufälligen Weg
  Wahrscheinlichkeit bei Weg mit vielen Pheromonen höher

Ameisenalgorithmus
Anwendung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Oft benutzt bei *TSP* (Travelling-Salesman-Problem) oder QAP

QAP (Quadratic-Assignment-Problem)

Gegeben:

$f \in F$	Einrichtungen
$l \in L$	Orte
$d(l_1, l_2)$	Distanz zwischen zwei Orten ($d : L \times L \mapsto R$)
$w(f_1, f_2)$	Fluß zwischen zwei Einrichtungen ($w : F \times F \mapsto R$)

Gesucht: Zuordnung $a : F \mapsto L$ bei der $\sum_{f_1, f_2 \in F} w(f_1, f_2) \cdot d(a(f_1), a(f_2))$ minimal wird

- Lösung wird iterativ in jedem *Agenten* (Ameise) aufgebaut
- Jede Ameise läuft zufälligen Weg
  Wahrscheinlichkeit bei Weg mit vielen Pheromonen höher
- Nach Konstruktion des Wege, entsprechend der Kosten Pheromongehalt der Wege aller Ameisen aktualisieren

Ameisenalgorithmus
UPP-Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zellen $\mapsto$ Einrichtungen

Ameisenalgorithmus
UPP-Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zellen $\mapsto$ Einrichtungen
- Orte $\mapsto$ Positionen im Raster

Ameisenalgorithmus
UPP-Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zellen $\mapsto$ Einrichtungen
- Orte $\mapsto$ Positionen im Raster
- Fluß $\mapsto$ Anzahl der adjazenten Zellen

Ameisenalgorithmus
UPP-Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zellen $\mapsto$ Einrichtungen
- Orte $\mapsto$ Positionen im Raster
- Fluß $\mapsto$ Anzahl der adjazenten Zellen
- Distanz $\mapsto$ Distanz

Ameisenalgorithmus
Algorithmus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

```
Ant_colony_optimization:
begin
    Init_heuristics() ;
    repeat
        forall the Ants i do
            Ant i.generate_solution()
        Update_pheromons() ;
    until Stop();
```

```
Ant.generate_solution():
begin
    for NumberCells do
        Select_cell() ;
        Assign_cell_to_location()
    Improve_solution() ;
    if solution < bsf then
        bsf := solution
```

Stop(): Abbruchkriterium: Anzahl Iterationen abhängig von Problemgröße, keine Änderung der BSF, ...

Improve_solution(): Lokale Suche zum verbessern des Ergebnisses

Select_cell(): Zufällig, feste Reihenfolge (z.B. sortiert nach Summe der inzidenten Flüße)

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
d_i *Distanzpotial* einer Position
(Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

  f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
  d_i *Distanzpotial* einer Position
  (Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)
- Setzen sonstiger Parameter:

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
d_i *Distanzpotial* einer Position
(Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)

- Setzen sonstiger Parameter:
  - k Anzahl Ameisen

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
d_i *Distanzpotial* einer Position
(Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)

- Setzen sonstiger Parameter:
  - k Anzahl Ameisen
  - Q Wert der Pheromonerhöhung (abhängig von Zielfunktion)

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
d_i *Distanzpotial* einer Position
(Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)

- Setzen sonstiger Parameter:
  - k Anzahl Ameisen
  - Q Wert der Pheromonerhöhung (abhängig von Zielfunktion)
  - α, β > 0 Gewichtung der Pheromone (α) und heuristischen Information (β)

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
d_i *Distanzpotial* einer Position
(Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)

- Setzen sonstiger Parameter:
  - k Anzahl Ameisen
  - Q Wert der Pheromonerhöhung (abhängig von Zielfunktion)
  - α, β > 0 Gewichtung der Pheromone (α) und heuristischen Information (β)
  - ρ Persistenz der Pheromone

Ameisenalgorithmus
Initialisierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Heuristische Information

$$\eta_{ij} = \frac{1}{f_i \cdot d_j}$$

f_i *Flußpotenial* der Zelle (Anzahl verbundener Zellen)
d_i *Distanzpotial* einer Position
(Summe der Distanzen zu allen anderen Positionen)

- Setzen sonstiger Parameter:

k	Anzahl Ameisen
Q	Wert der Pheromonerhöhung (abhängig von Zielfunktion)
α, β	> 0 Gewichtung der Pheromone (α) und heuristischen Information (β)
ρ	Persistenz der Pheromone
τ_{ij}	Pheromone, Initialisierung mit Wert > 0

Ameisenalgorithmus
Zuweisung Zelle $\mapsto$ Position

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wahrscheinlichkeit das Zelle i Position j zugewiesen wird (in Iteration t der Ameise k):

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}(t)^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il}(t)^\alpha \cdot \eta_{il}^\beta}$$

- N_i^k ist die Nachbarschaft von Knoten i

Ameisenalgorithmus
Zuweisung Zelle $\mapsto$ Position

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wahrscheinlichkeit das Zelle i Position j zugewiesen wird (in Iteration t der Ameise k):

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}(t)^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il}(t)^\alpha \cdot \eta_{il}^\beta}$$

- N_i^k ist die Nachbarschaft von Knoten i
- $\sum_{l \in N_i^k} p_{il}(t) = 1$

Ameisenalgorithmus
Zuweisung Zelle $\mapsto$ Position

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wahrscheinlichkeit das Zelle *i* Position *j* zugewiesen wird (in Iteration *t* der Ameise *k*):

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}(t)^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il}(t)^\alpha \cdot \eta_{il}^\beta}$$

- N_i^k ist die Nachbarschaft von Knoten *i*
- $\sum_{l \in N_i^k} p_{il}(t) = 1$
- τ_{ij} Pheromonwerte, η_{ij} heuristische Information

Ameisenalgorithm
Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k}$$

Mit

$$\Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} Q/cost(solution) & \text{Zelle } i \text{ ist Position } j \text{ zugeordnet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Q Menge der Pheromone einer Ameise

$0 < \rho < 1$ Persistenz der Pheromone ($(1-\rho)$ Evaporation)
Modelliert verdampfen von Pheromonen (gegen lokale Minima)

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing
- Änlich zu SA: Theoretisch optimal

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing
- Änlich zu SA: Theoretisch optimal
- Kann dynamisch auf Graphänderungen reagieren

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing
- Änlich zu SA: Theoretisch optimal
- Kann dynamisch auf Graphänderungen reagieren
- Viele Varianten: AS, ANTS, MAX-MIN, FANT, HAS-QAP, ... Hauptunterschied sind andere ...

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing
- Änlich zu SA: Theoretisch optimal
- Kann dynamisch auf Graphänderungen reagieren
- Viele Varianten: AS, ANTS, MAX-MIN, FANT, HAS-QAP, ... Hauptunterschied sind andere ...
  - heuristische Informationen

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

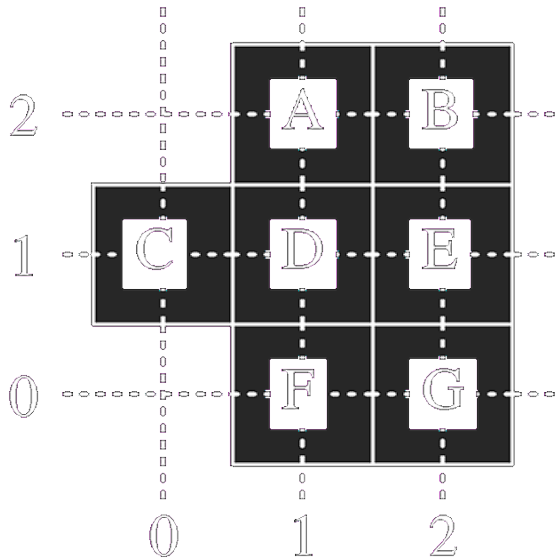
- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing
- Änlich zu SA: Theoretisch optimal
- Kann dynamisch auf Graphänderungen reagieren
- Viele Varianten: AS, ANTS, MAX-MIN, FANT, HAS-QAP, ... Hauptunterschied sind andere ...
  - heuristische Informationen
  - Pheromon Updates

Ameisenalgorithmus
Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schlechte Konvergenz in der Nähe des Optimums, da kaum ein Unterschied im Pheremonlevel
- Schlechte Skalierung
- Qualität und Laufzeit vergleichbar mit Simulated Annealing
- Änlich zu SA: Theoretisch optimal
- Kann dynamisch auf Graphänderungen reagieren
- Viele Varianten: AS, ANTS, MAX-MIN, FANT, HAS-QAP, ... Hauptunterschied sind andere ...
  - heuristische Informationen
  - Pheromon Updates
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP



n_1: A, B, F, G

n_2: B, E

n_3: D, E

n_4: A, C, D

n_5: C, D, F

n_6: C, E, F, G

n_7: D, F

n_8: F, G

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 18 \\ 15 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Zellen sortiert nach Flußpotenial: F, C, G, D, A, E, B

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Init

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\eta = \begin{pmatrix} 0.0111 & 0.0139 & 0.0079 & 0.0093 & 0.0111 & 0.0056 & 0.0079 \\ 0.0133 & 0.0167 & 0.0095 & 0.0111 & 0.0133 & 0.0067 & 0.0095 \\ 0.0111 & 0.0139 & 0.0079 & 0.0093 & 0.0111 & 0.0056 & 0.0079 \\ 0.0133 & 0.0167 & 0.0095 & 0.0111 & 0.0133 & 0.0067 & 0.0095 \\ 0.0167 & 0.0208 & 0.0119 & 0.0139 & 0.0167 & 0.0083 & 0.0119 \\ 0.0133 & 0.0167 & 0.0095 & 0.0111 & 0.0133 & 0.0067 & 0.0095 \\ 0.0111 & 0.0139 & 0.0079 & 0.0093 & 0.0111 & 0.0056 & 0.0079 \\ 0.0133 & 0.0167 & 0.0095 & 0.0111 & 0.0133 & 0.0067 & 0.0095 \\ 0.0111 & 0.0139 & 0.0079 & 0.0093 & 0.0111 & 0.0056 & 0.0079 \end{pmatrix}$$

$$Q = 2, \alpha = \beta = 1, \rho = 0.8$$

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Init

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\tau = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$Q = 2, \alpha = \beta = 1, \rho = 0.8$$

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Auswahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$p_{ij} = \frac{\tau_{ij} \cdot \eta_{ij}}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il} \cdot \eta_{il}}$$

Platziere Zelle F

η_{Fi}	0.0056	0.0067	0.0056	0.0067	0.0083	0.0067	0.0056	0.0067	0.0056
τ_{Fi}	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\tau_{Fi} \cdot \eta_{Fi}$	0.00056	0.00067	0.00056	0.00067	0.00083	0.00067	0.00056	0.00067	0.00056

$\sum$ = 0.00575

p_{Fi}	0.0973	0.1165	0.0973	0.1165	0.1443	0.1165	0.0973	0.1165	0.0973

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Auswahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$p_{ij} = \frac{\tau_{ij} \cdot \eta_{ij}}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il} \cdot \eta_{il}}$$

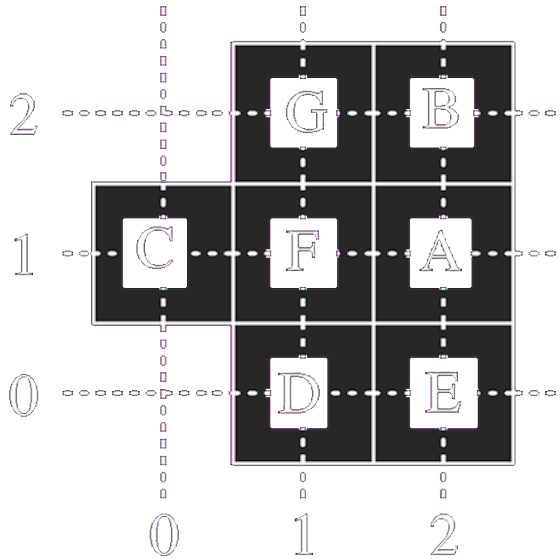
Platziere Zelle C

η_{Ci}	0.0079	0.0095	0.0079	0.0095	0.0119	0.0095	0.0079	0.0095	0.0079
τ_{Ci}	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\tau_{Ci} \cdot \eta_{Ci}$	0.00079	0.00095	0.00079	0.00095		0.00095	0.00079	0.00095	0.00079
$\sum = 0.00696$									
p_{Ci}	0.1135	0.1365	0.1135	0.1365		0.1365	0.1135	0.1365	0.1135

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

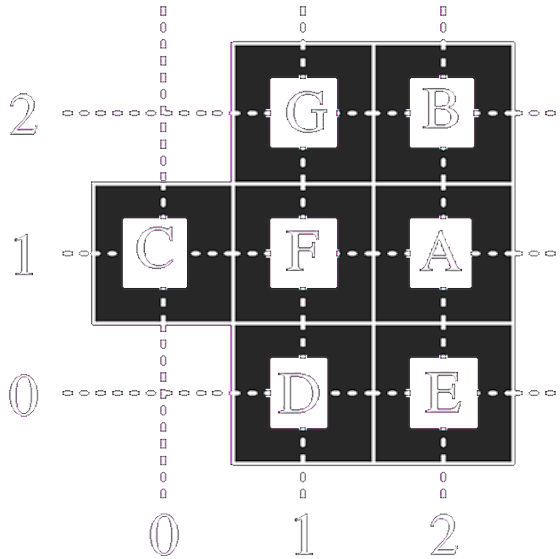
- Analog G, D, A, E, B



Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analog G, D, A, E, B

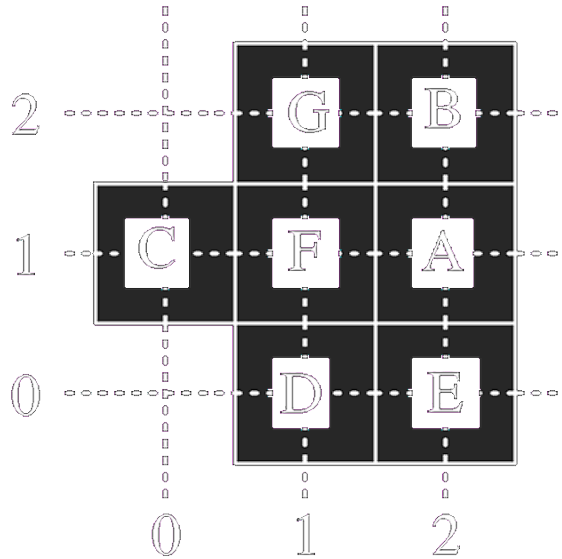


- Kosten (HPWL): 24

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analog G, D, A, E, B



- Kosten (HPWL): 24
- Nächster Schritt: Pheromone aktualisieren

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Update

$$\tau = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Update

$$\tau = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \end{pmatrix}$$

$\rho = 0.8$ Evaporation

Ameisenalgorithmus
Beispiel UPP – Update

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\tau = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.163 \\ 0.08 & 0.163 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.163 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.163 & 0.08 \\ 0.163 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.163 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.163 & 0.08 & 0.08 \end{pmatrix}$$

$\frac{2}{24}$ auf genommenen Pfad hinzufügen

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound
- Wiederverwendung alter Ergebnisse

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound
- Wiederverwendung alter Ergebnisse
  - Beispiel: Dynamic Programming

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound
- Wiederverwendung alter Ergebnisse
  - Beispiel: Dynamic Programming
- Mathematisches Modell

Exakte Lösungsverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erschöpfende Suche
  - Durchlaufen des gesamten Lösungsraums
  - Beispiel: Backtracking
- Eliminierung *schlechter* Ansätze
  - Abschätzung aus Teillösung
  - Beispiel: Branch-and-Bound
- Wiederverwendung alter Ergebnisse
  - Beispiel: Dynamic Programming
- Mathematisches Modell
  - Beispiel: Linear Programming

Backtracking

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Den gesamten Lösungsraum enumerieren

```
float bsfCost ;
solution_element current[n], bsf[n] ;
main(): begin
    bsfCost := ∞ ;
    backtrack(0) ;
    report(bsf) ;
```

```
backtrack(int k): begin
    float newCost ;
    solution_element sol_el ;
    if k = n then
        new_cost := cost(current) ;
        if newCost < bsfCost then
            bsfCost := newCost ;
            bsf := copy(bsf) ;
    else
        foreach (sol_el ∈
        allowed(current, k)) do
            current[k] := sol_el ;
            backtrack(k+1) ;
```

Backtracking

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Den gesamten Lösungsraum enumerieren
- Jede Lösung wird dabei schrittweise aufgebaut (f_1, f_2, ...)

```
float bsfCost ;
solution_element current[n], bsf[n] ;
main(): begin
    bsfCost := ∞ ;
    backtrack(0) ;
    report(bsf) ;
```

```
backtrack(int k): begin
    float newCost ;
    solution_element sol_el ;
    if k = n then
        new_cost := cost(current) ;
        if newCost < bsfCost then
            bsfCost := newCost ;
            bsf := copy(bsf) ;
    else
        foreach (sol_el ∈
        allowed(current, k)) do
            current[k] := sol_el ;
            backtrack(k+1) ;
```

Backtracking

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Den gesamten Lösungsraum enumerieren
- Jede Lösung wird dabei schrittweise aufgebaut (f_1, f_2, ...)
- Zu jeder Lösung die Kosten bestimmen und ggf. BSF aktualisieren

```
float bsfCost ;
solution_element current[n], bsf[n] ;
main(): begin
    bsfCost := ∞ ;
    backtrack(0) ;
    report(bsf) ;
```

```
backtrack(int k): begin
    float newCost ;
    solution_element sol_el ;
    if k = n then
        new_cost := cost(current) ;
        if newCost < bsfCost then
            bsfCost := newCost ;
            bsf := copy(bsf) ;
    else
        foreach (sol_el ∈
        allowed(current, k)) do
            current[k] := sol_el ;
            backtrack(k+1) ;
```

Backtracking

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Den gesamten Lösungsraum enumerieren
- Jede Lösung wird dabei schrittweise aufgebaut (f_1, f_2, ...)
- Zu jeder Lösung die Kosten bestimmen und ggf. BSF aktualisieren
- Üblicherweise: Rekursiv

```
float bsfCost ;
solution_element current[n], bsf[n] ;
main(): begin
    bsfCost := ∞ ;
    backtrack(0) ;
    report(bsf) ;
```

```
backtrack(int k): begin
    float newCost ;
    solution_element sol_el ;
    if k = n then
        new_cost := cost(current) ;
        if newCost < bsfCost then
            bsfCost := newCost ;
            bsf := copy(bsf) ;
    else
        foreach (sol_el ∈
        allowed(current, k)) do
            current[k] := sol_el ;
            backtrack(k+1) ;
```

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten

Backtracking
UPP Beispiel

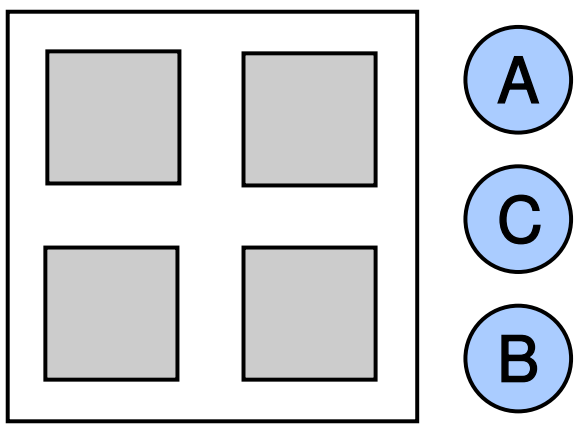
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

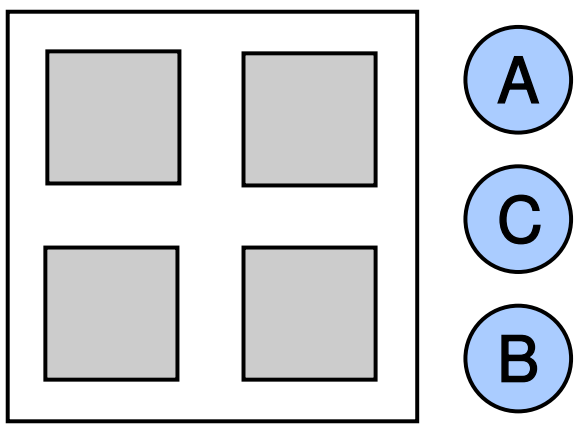
- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten



Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten

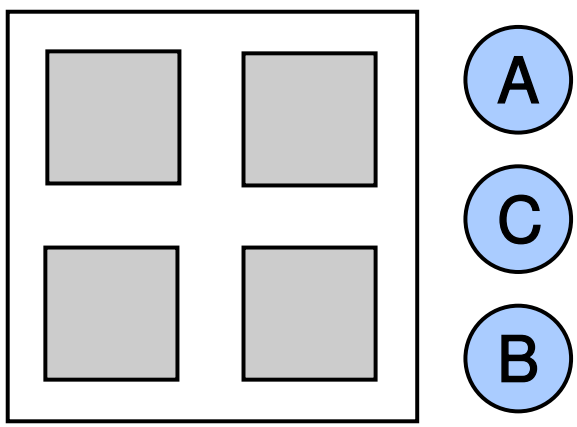


Netzliste:

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten



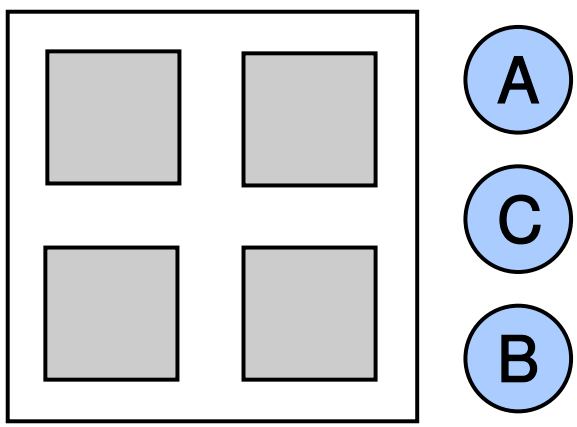
Netzliste:

n_1 : A, B, C

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten



Netzliste:

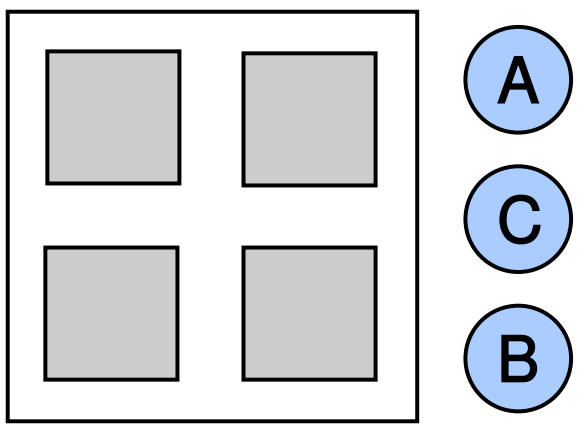
n_1 : A, B, C

n_2 : A, B

Backtracking
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung: Bei n Zellen auf m möglichen Positionen:
  $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$
  Zelle i wird auf Position f_i platziert
- Explizite Einschränkungen: $f_i \in 1, \ldots, m$
- Implizite Einschränkungen: $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$
- Konkretes Beispiel: $n = 3$, $m = 4$, HPWL-Kosten



Netzliste:

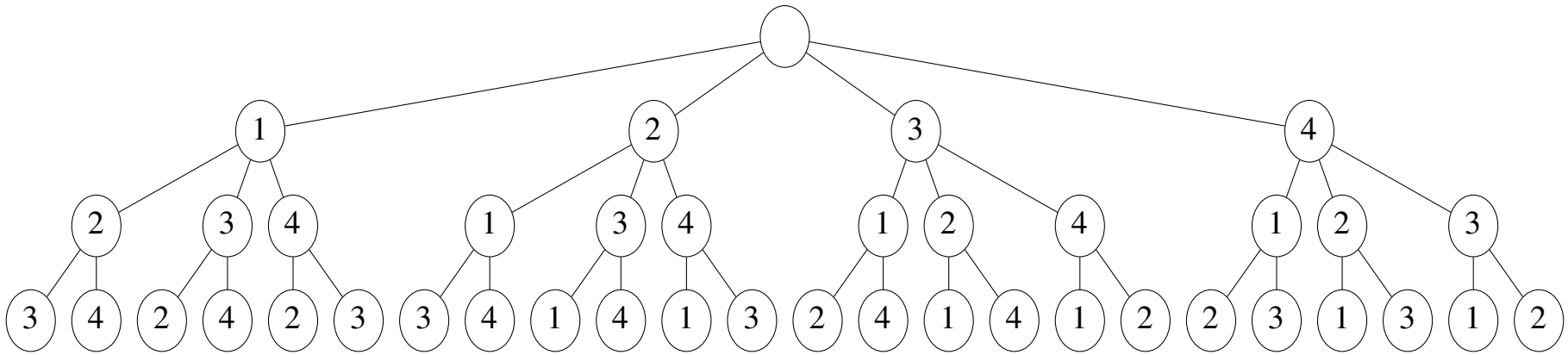
n_1 : A, B, C

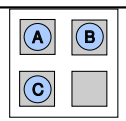
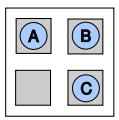
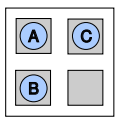
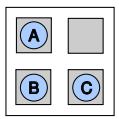
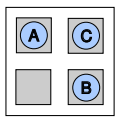
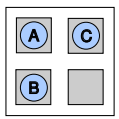
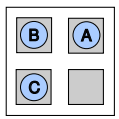
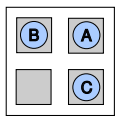
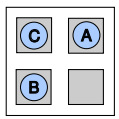
n_2 : A, B

n_3 : B, C

Backtracking
UPP Suchbaum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Lsg.	$\vec{f}$	Kosten
	123	5
	124	5
	132	5
	134	4
	142	5
	143	5
	213	4
	214	5
	124	5
⋮	⋮	⋮

Branch-and-Bound

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Branch = Verzweigen des Suchbaums

Branch-and-Bound

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Branch = Verzweigen des Suchbaums
- Bound = Beschneiden der Äste wenn möglich

Branch-and-Bound

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Branch = Verzweigen des Suchbaums
- Bound = Beschneiden der Äste wenn möglich
- Teillösung $\underline{f}^{(k)} = [f_1, \ldots, f_k, \perp, \ldots, \perp]$

Branch-and-Bound

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Branch = Verzweigen des Suchbaums
- Bound = Beschneiden der Äste wenn möglich
- Teillösung $\underline{f}^{(k)} = [f_1, \ldots, f_k, \perp, \ldots, \perp]$
- $D(\underline{f}^{(k)})$: Menge aus $\underline{f}^{(k)}$ herleitbarer Lösungen

Branch-and-Bound

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Branch = Verzweigen des Suchbaums
- Bound = Beschneiden der Äste wenn möglich
- Teillösung $\underline{\vec{f}}^{(k)} = [f_1, \ldots, f_k, \perp, \ldots, \perp]$
- $D(\underline{\vec{f}}^{(k)})$: Menge aus $\underline{\vec{f}}^{(k)}$ herleitbarer Lösungen
- Minimale mögliche Kosten $\underline{cost}$ einer Teillösung $\underline{\vec{f}}^{(k)}$ abschätzen
  Verwerfe $\underline{\vec{f}}^{(k)}$ falls $\underline{cost}(\underline{\vec{f}}^{(k)}) > cost(BSF)$
  $\Rightarrow$ Suchbaum wird gestutzt

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - $\Rightarrow$ Überflüssige Schritte

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - $\Rightarrow$ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - $\Rightarrow$ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu pessimistisch (“Nein, das bringt nichts mehr”)

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - $\Rightarrow$ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu pessimistisch (“Nein, das bringt nichts mehr”)
    - $\Rightarrow$ Optimum wird möglicherweise weggestutzt

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - $\Rightarrow$ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - $\Rightarrow$ Zu pessimistisch (“Nein, das bringt nichts mehr”)
    - $\Rightarrow$ Optimum wird möglicherweise weggestutzt
    - $\Rightarrow$ Keine exakte Lösung mehr!

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - ⇒ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - ⇒ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - ⇒ Zu pessimistisch (“Nein, das bringt nichts mehr”)
    - ⇒ Optimum wird möglicherweise weggestutzt
    - ⇒ Keine exakte Lösung mehr!
  - *cost* sollte möglichst genau sein

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - ⇒ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - ⇒ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - ⇒ Zu pessimistisch (“Nein, das bringt nichts mehr”)
    - ⇒ Optimum wird möglicherweise weggestutzt
    - ⇒ Keine exakte Lösung mehr!
  - *cost* sollte möglichst genau sein

Branch-and-Bound
Abschätzfunktion *cost*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

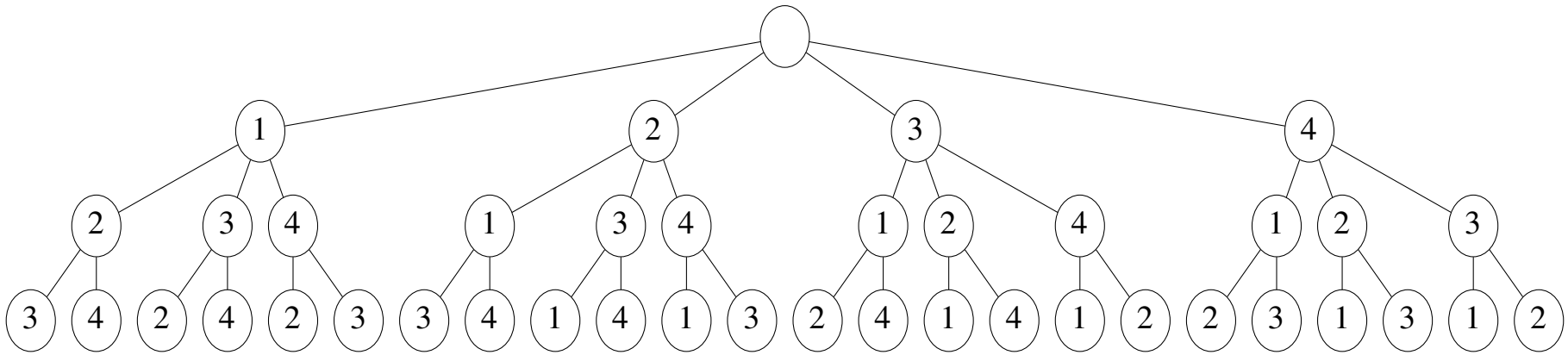
- Effekt der Abschätzung
  - Reale Kosten höher als geschätzte Kosten
    - ⇒ Zu optimistisch (“Ja, es lohnt sich weiterzumacen”)
    - ⇒ Überflüssige Schritte
  - Reale Kosten niedriger als geschätzte Kosten
    - ⇒ Zu pessimistisch (“Nein, das bringt nichts mehr”)
    - ⇒ Optimum wird möglicherweise weggestutzt
    - ⇒ Keine exakte Lösung mehr!
  - *cost* sollte möglichst genau sein

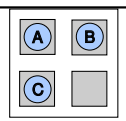
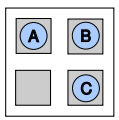
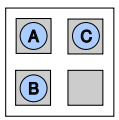
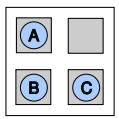
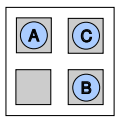
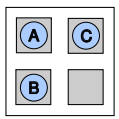
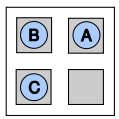
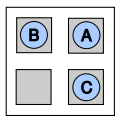
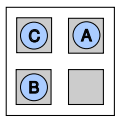
UPP Beispiel: Kostenabschätzung

- Gute Abschätzung: Minimal mögliche Kosten eines Netzes,

Branch-and-Bound
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Lsg.	$\vec{f}$	Kosten
	123	5
	124	5
	132	5
	134	4
	142	5
	143	5
	213	4
	214	5
	124	5
⋮	⋮	⋮

Dynamisches Programmieren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wiederverwenden von Lösungen
- Prinzip der Optimalität:
  - Annahme: Lösung eines komplex Problems kann optimal aus dem optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammengesetzt werden (ebenfalls Idee bei Teile-Und-Herrsche)
  - Gilt aber nicht für alle Probleme!
- p Parameter für Problemkomplexität

  $p = k$: Gesamtproblem

  $p < k$: Teilproblem

  $p = 0$ oder $= 1$: Kleinstes Problem
- Für viele Probleme anwendbar. Beispielsweise:
  - Klassisches Beispiel: Fibonacci-Zahlen
  - Dijkstra SP
  - Aber auch für NP-vollständige Probleme

Dynamisches Programmieren
Beispiel Fibonnacci-Zahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Fibonacci-Zahlen: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-1}$ mit $F_0 = 0, F_1 = 1$

Klassische Implementierung:

```
fib(int n): begin
    if (n=0) then
        return 0
    if (n=1) then
        return 1
    else
        return (fib(n-1)+fib(n-2))
```

- $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow 1.6$ (genau $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) $\Rightarrow F_n > 1.6^n$
- Da immer 1 aufsummiert werden $\Rightarrow \mathcal{O}(1.6^n)$

Dynamisches Programmieren

```
fib(int n): begin
    Fib[0] := 0 ;
    Fib[1] := 1 ;
    for (i=2; i ≤ n; i++) do
        Fib[i] := Fib[i-1] + Fib[ i-2 ]
    return Fib[n] ;
```

- Teillösungen bei $p = i$
- Gesamtlösung bei $p = n$

Mathematische Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Nahezu alle Probleme Optimierungsprobleme
- Entsprechende mathematische Modelle wählen und bekannte mathematische Verfahren anwenden

Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verfahren aus dem Operations Research

Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verfahren aus dem Operations Research
- Beispiel:

	Produkt 1	Produkt 2	Liefermenge
Rohstoff A	42	14	100
Rohstoff B	23	53	200
Preis	550	250	

Ziel: Optimiere auf maximalen Umsatz

Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell: x_1, x_2 Anzahl Produkte 1 und 2

Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell: x_1, x_2 Anzahl Produkte 1 und 2
- Kanonische Form (üblicherweise max und $x_i \geq 0$ implizit)

$$\begin{aligned} \texttt{max:} \quad & 550x_1 + 250x_2 \\ \texttt{subject to:} \quad & 42x_1 + 14x_2 \leq 100 \\ & 23x_1 + 53x_2 \leq 200 \end{aligned}$$

$$\texttt{and} \quad x_i \geq 0$$

Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell: x_1, x_2 Anzahl Produkte 1 und 2
- Kanonische Form (üblicherweise max und $x_i \geq 0$ implizit)

$$\begin{aligned} \texttt{max:} \quad & 550x_1 + 250x_2 \\ \texttt{subject to:} \quad & 42x_1 + 14x_2 \leq 100 \\ & 23x_1 + 53x_2 \leq 200 \end{aligned}$$

$$\texttt{and} \quad x_i \geq 0$$

- Lineares Programm

Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell: x_1, x_2 Anzahl Produkte 1 und 2
- Kanonische Form (üblicherweise max und $x_i \geq 0$ implizit)

$$\begin{aligned} \texttt{max:} \quad & 550x_1 + 250x_2 \\ \texttt{subject to:} \quad & 42x_1 + 14x_2 \leq 100 \\ & 23x_1 + 53x_2 \leq 200 \end{aligned}$$

$$\texttt{and} \quad x_i \geq 0$$

- Lineares Programm
- Matrixformulierung:

$$\begin{aligned} \texttt{max:} \quad & \vec{c} \cdot \vec{x} \\ \texttt{s.t.:} \quad & A\vec{x} \leq \vec{b}, x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell
  - Praktisch immer Polynomial

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell
  - Praktisch immer Polynomial
- Problem ist in **P**

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell
  - Praktisch immer Polynomial
- Problem ist in **P**
  - Ellipsoid-Verfahren (1979)

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell
  - Praktisch immer Polynomial
- Problem ist in **P**
  - Ellipsoid-Verfahren (1979)
  - Innere Punkte Methoden (1984)
    wandern nicht die Ecken ab, sondern gehen durch den Simplex

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell
  - Praktisch immer Polynomial
- Problem ist in **P**
  - Ellipsoid-Verfahren (1979)
  - Innere Punkte Methoden (1984)
    wandern nicht die Ecken ab, sondern gehen durch den Simplex
- Lösung durch *LP Solver*

Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

Mathematische Optimierung
Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung mittels Simplex-Verfahren (Danzig, 1947)
  - Darstellung der Kostenfunktion und Restriktionen als Hyperebene im Raum
  - Restriktionen bilden ein Simplex (Polyeder), Lösung eine der Ecken
  - Worst-Case-Komplexität: Exponentiell
  - Praktisch immer Polynomial
- Problem ist in **P**
  - Ellipsoid-Verfahren (1979)
  - Innere Punkte Methoden (1984)
    wandern nicht die Ecken ab, sondern gehen durch den Simplex
- Lösung durch *LP Solver*
  - lp_solve, GLPK, CLP, CPLEX, ...

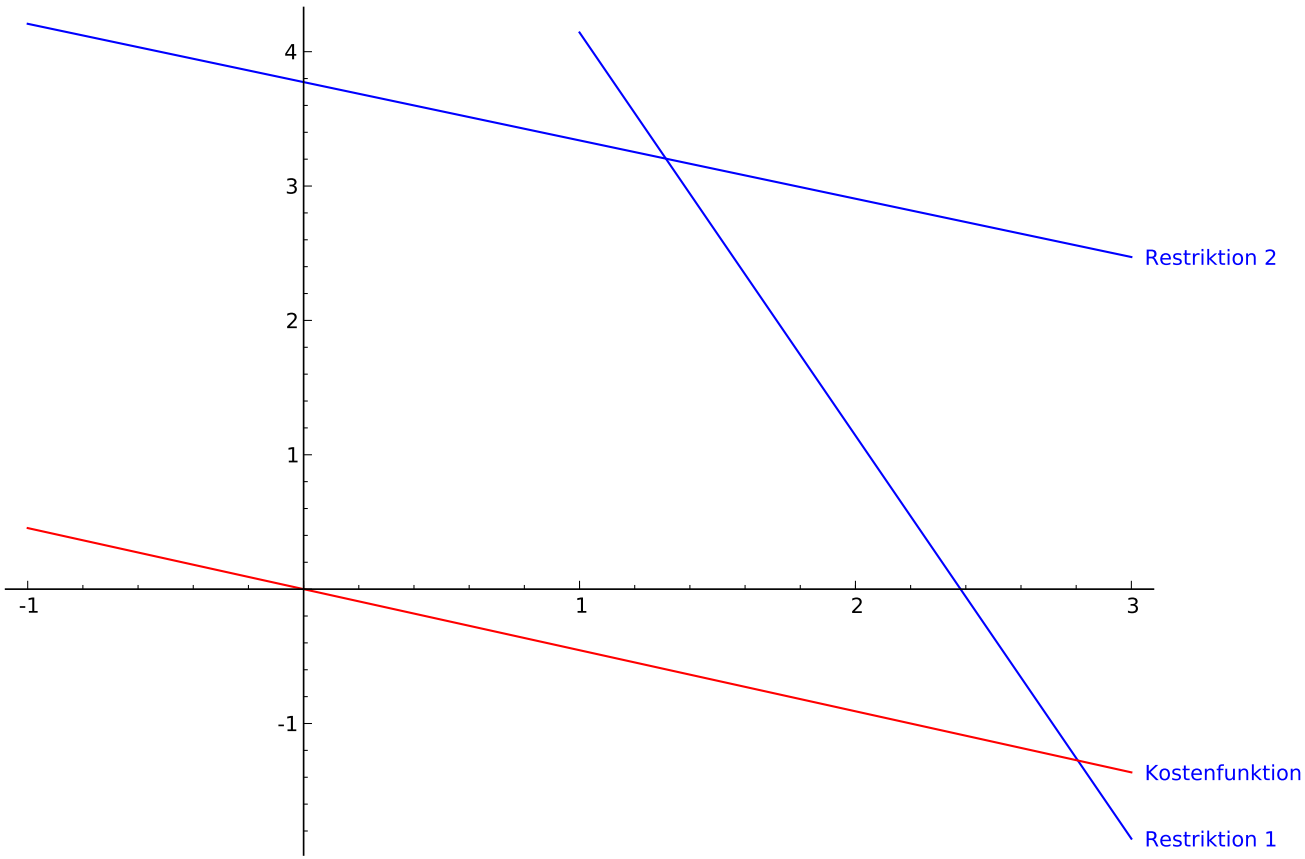
Beispiel

Optimum: $x_1 = 1.31303, x_2 = 3.20378$

Umsatz: 1523.11

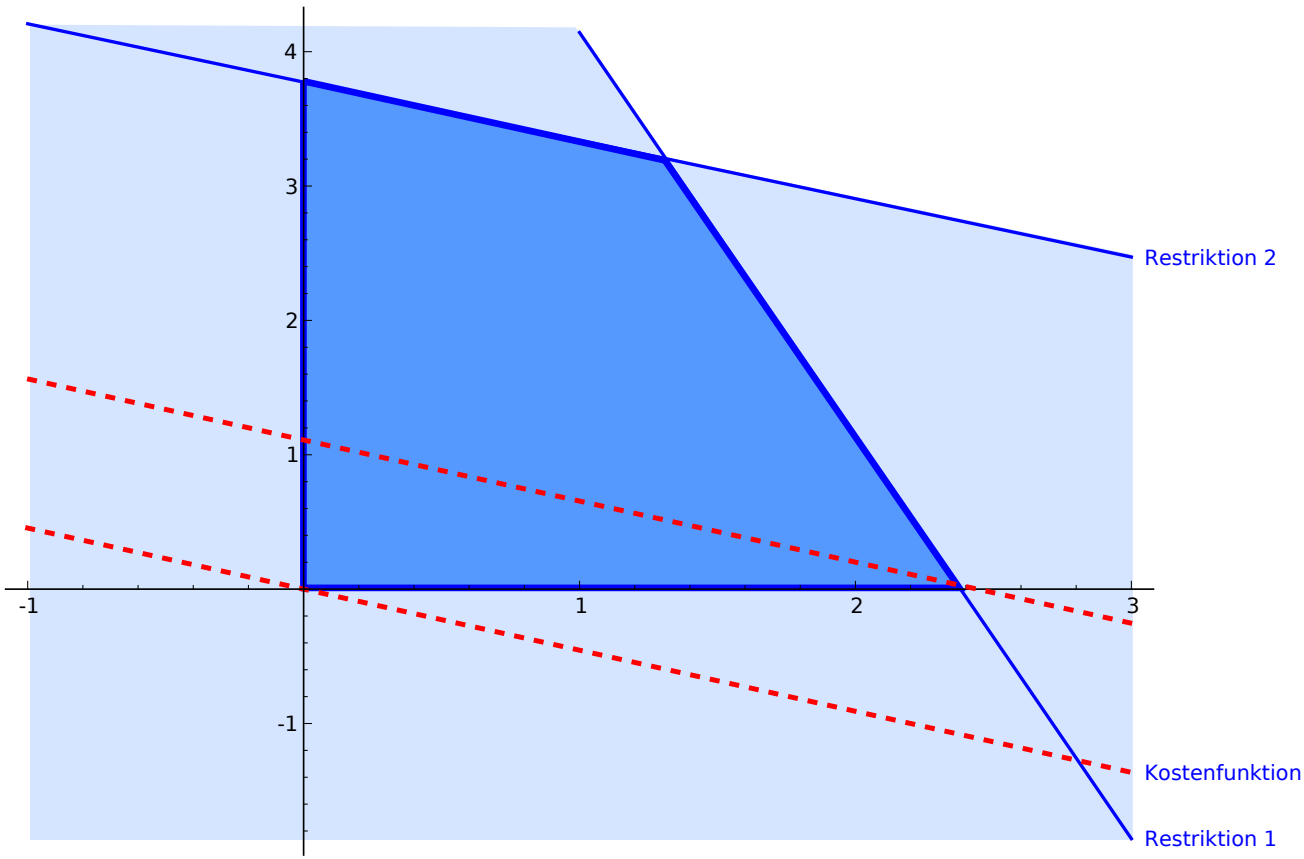
Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Mathematische Optimierung
Lineare Programmierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

$\Rightarrow$ Integer Lineare Programmierung (ILP)

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

$\Rightarrow$ Integer Lineare Programmierung (ILP)

- Lösungsmethoden komplizierter
  Lösungsverfahren NP-vollständig

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

$\Rightarrow$ Integer Lineare Programmierung (ILP)

- Lösungsmethoden komplizierter
  Lösungsverfahren NP-vollständig
- Einfachste Heuristik: Rundung

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

$\Rightarrow$ Integer Lineare Programmierung (ILP)

- Lösungsmethoden komplizierter
  Lösungsverfahren NP-vollständig
- Einfachste Heuristik: Rundung
- Nicht sinnvoll

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

$\Rightarrow$ Integer Lineare Programmierung (ILP)

- Lösungsmethoden komplizierter
  Lösungsverfahren NP-vollständig
- Einfachste Heuristik: Rundung
- Nicht sinnvoll
  - Sub-Optimial

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
Integer Lineare Optimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem: Oft nur ganzzahlige Variablen erlaubt!
  Es lassen sich nicht 1.31303 Produkte herstellen/verkaufen

$\Rightarrow$ Integer Lineare Programmierung (ILP)

- Lösungsmethoden komplizierter
  Lösungsverfahren NP-vollständig
- Einfachste Heuristik: Rundung
- Nicht sinnvoll
  - Sub-Optimial
  - Unzulässige Lösung

Beispiel

$x_1 = 2, x_2 = 1$
Umsatz: 1350

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem) (nur bei $0-1$-ILP)

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem) (nur bei $0-1$-ILP)
  - Schnittebenenverfahren (Cutting-Planes)
    Wiederholt normales LP lösen und Restriktionen für Ganzzahligkeit hinzufügen

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem) (nur bei $0-1$-ILP)
  - Schnittebenenverfahren (Cutting-Planes)
    Wiederholt normales LP lösen und Restriktionen für Ganzzahligkeit hinzufügen
  - Manchmal durch Matrixstruktur implizit garantiert, dass Lösung ganzzahling ist:
    Total unimodulare Matrizen

$\Rightarrow$ Standard Löser benutzen

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem) (nur bei $0-1$-ILP)
  - Schnittebenenverfahren (Cutting-Planes)
    Wiederholt normales LP lösen und Restriktionen für Ganzzahligkeit hinzufügen
  - Manchmal durch Matrixstruktur implizit garantiert, dass Lösung ganzzahling ist:
    Total unimodulare Matrizen

Beispiele

$\Rightarrow$ Standard Löser benutzen

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem) (nur bei $0-1$-ILP)
  - Schnittebenenverfahren (Cutting-Planes)
    Wiederholt normales LP lösen und Restriktionen für Ganzzahligkeit hinzufügen
  - Manchmal durch Matrixstruktur implizit garantiert, dass Lösung ganzzahling ist:
    Total unimodulare Matrizen

Beispiele

- Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen

$\Rightarrow$ Standard Löser benutzen

Mathematische Optimierung
ILP

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungverfahren:
  - LP kombiniert mit branch-and-bound (auf- und abrunden)
  - SAT (Erfüllbarkeitsproblem) (nur bei $0-1$-ILP)
  - Schnittebenenverfahren (Cutting-Planes)
    Wiederholt normales LP lösen und Restriktionen für Ganzzahligkeit hinzufügen
  - Manchmal durch Matrixstruktur implizit garantiert, dass Lösung ganzzahling ist:
    Total unimodulare Matrizen

Beispiele

- Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen
- Restriktionsmatrix von Max-Flow-Problemen

$\Rightarrow$ Standard Löser benutzen

Mathematische Optimierung
LP Varianten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Häufige Varianten:

- Variablen nur 0 oder 1:
  0 – 1-ILP

Mathematische Optimierung
LP Varianten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Häufige Varianten:

- Variablen nur 0 oder 1:
  0 – 1-ILP
- Gemischt LP und ILP:
  Mixed Linear Programm (MLP)

Mathematische Optimierung
LP Varianten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Häufige Varianten:

- Variablen nur 0 oder 1:
  0 – 1-ILP
- Gemischt LP und ILP:
  Mixed Linear Programm (MLP)
- Quadratische Zielfunktion (weiterhin Restriktionen linear):
  Quadratisches Programmieren (QP)
  Vorteil bei Quadratisch-Konvexen-Funktionen: Lokale Extrema = Globale

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

  Zielfunktion: min: $\sum_k n_k$

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

  Zielfunktion: min: $\sum_k n_k$

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

  Zielfunktion: min: $\sum_k n_k$

  Restriktionen:
  - Alle Platzieren: $\forall i \sum_j x_{ij} = 1$ ($2N$ Restriktionen)

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

  Zielfunktion: min: $\sum_k n_k$

  Restriktionen:
  - Alle Platzieren: $\forall i \sum_j x_{ij} = 1$ ($2N$ Restriktionen)
  - Überlappungsfreiheit: $\forall j : \sum_i x_{ij} \leq 1$ (M Restriktionen)

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

  Zielfunktion: min: $\sum_k n_k$

  Restriktionen:
  - Alle Platzieren: $\forall i \sum_j x_{ij} = 1$ ($2N$ Restriktionen)
  - Überlappungsfreiheit: $\forall j : \sum_i x_{ij} \leq 1$ (M Restriktionen)
  - Kostenfunktion: $n_k = c_{kV} + c_{kH}$

ILP
UPP Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modell:

  $x_{ij} \in \mathbf{B}$: Zelle $i = 1, \ldots, N$ wird auf Position $j = 1, \ldots, M$ platziert.

  $n_k \in \mathbf{R}$: Kosten für ein Netz $k = 1, \ldots, K$.

  Zielfunktion: min: $\sum_k n_k$

  Restriktionen:
  - Alle Platzieren: $\forall i \sum_j x_{ij} = 1$ ($2N$ Restriktionen)
  - Überlappungsfreiheit: $\forall j : \sum_i x_{ij} \leq 1$ (M Restriktionen)
  - Kostenfunktion: $n_k = c_{kV} + c_{kH}$
  - Netz k:

    $c_{kV} = c_{kMaxV} - c_{kMinV}$

    $c_{kMaxV} = max_{i \in \text{ Netz } k} \{ x_{ij} \cdot$ 'zu j gehöriger x-Wert' $\}$

    $c_{kMinV} = min_{i \in \text{ Netz } k} \{ x_{ij} \cdot$ 'zu j gehöriger x-Wert' $\}$

    c_{kH} analog

    ($2K(2 + 2 \cdot \sum_k |\text{Netz } k|)$ Restriktionen)

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren (CG)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigentlich benutzt um große LGS zu lösen

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren (CG)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigentlich benutzt um große LGS zu lösen
- Vorteilhaft bei dünnbesetzten (sparse) Matrizen

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren (CG)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigentlich benutzt um große LGS zu lösen
- Vorteilhaft bei dünnbesetzten (sparse) Matrizen
- Minimieren einer Funktion $f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{x}^T A\vec{x} - b \cdot \vec{x} + c$,
  A symmetrisch, positiv definit

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren (CG)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigentlich benutzt um große LGS zu lösen
- Vorteilhaft bei dünnbesetzten (sparse) Matrizen
- Minimieren einer Funktion $f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{x}^T A\vec{x} - b \cdot \vec{x} + c$,
  A symmetrisch, positiv definit
- Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen $\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, ... \right)$
  in unserem Fall $f'(\vec{x}) = A\vec{x} - b$.

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren (CG)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigentlich benutzt um große LGS zu lösen
- Vorteilhaft bei dünnbesetzten (sparse) Matrizen
- Minimieren einer Funktion $f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{x}^T A\vec{x} - b \cdot \vec{x} + c$,
  A symmetrisch, positiv definit
- Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen $\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, ... \right)$
  in unserem Fall $f'(\vec{x}) = A\vec{x} - b$.
- $f'(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow$ lösen des LGS $Ax = b$

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

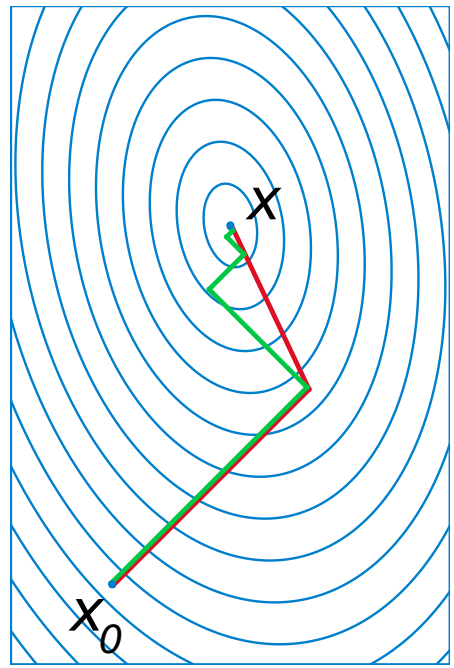
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Krylow-Unterraum-Verfahren
- Steilster Anstieg in Punkt x_k ist Gradient $f'(\vec{x_k}) = A\vec{x_k} - b$
- Residuum $r_k := -(A\vec{x_k} - b)$
- Minimiere Funktion in Richtung d_k
  d_i sind bzgl. A orthogonal zueinander (konjugiert)

$\Rightarrow$ α_k in entsprechende Richtung gehen

$\Rightarrow$ Neues x_k

- Neues Residuum r_{k+1} aus Altem und der Richtung d_k (mit zugehöriger Schrittweite β_k bestimmen)



[Quelle: Wikimedia]

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

cg(A,b) **begin**

Wähle $x_o \in \mathbf{R^n}$;

$r_0 := b - Ax_0$; $d_0 := r_0$;

k := 0 ;

repeat

$\alpha_k := \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}$;

$x_{k+1} := x_k + \alpha_k \cdot d_k$;

$r_{k+1} := r_k + \alpha_k \cdot A d_k$;

$\beta_k := \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$;

$d_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k \cdot d_k$;

k++ ;

until *Residuum* $||r_k|| < \epsilon$;

return x_k ;

- x_0 beliebig
  schnellere Konvergenz, falls x_0 nahe an Lösung
- Optimierung: In der Schleife $A \cdot d_k$ nur einmal berechnen
- Auch andere Abbruchbedingungen möglich:
  - $\Delta x_k < \epsilon$
  - Max. Anzahl Iterationen
  - ...

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren (nichtlinear)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

cg(A,b) **begin**

Wähle $x_o \in \mathbf{R^n}$;

$r_0 := -\nabla f(x_0)$; $d_0 := r_0$;

k := 0 ;

repeat

$\alpha_k := \frac{r_k^T r_k}{d_k^T \nabla^2(f(x_k)) d_k}$;

$x_{k+1} := x_k + \alpha \cdot d_k$;

$r_{k+1} := -\nabla f(x_{k+1})$;

$\beta_k := \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$;

$d_{k+1} := r_{k+1} + \beta_{k+1} \cdot d_k$;

k++ ;

until *Residuum* $||r_k|| < \epsilon$;

return x_k ;

- Hesse-Matrix zur α-Bestimmung
  Üblicherweise $\mathcal{O}(n^2)$,
  problemabhängig ggf. nur $\mathcal{O}(n)$
- Andere Möglichkeit:
  α mittels Linesearch
- Andere Abbruchbedingungen

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:

  Theoretisch: Nach n Schritten

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:
  - Theoretisch: Nach n Schritten
  - Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:

  Theoretisch: Nach n Schritten

  Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig

  Praktisch II: Schneller, abhänging von Anzahl verschiedener Eigenwerte

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:
  - Theoretisch: Nach n Schritten
  - Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig
  - Praktisch II: Schneller, abhänging von Anzahl verschiedener Eigenwerte
- Wenn nötig Matrix konditionieren
  $\Rightarrow$ Preconditioner

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:
  - Theoretisch: Nach n Schritten
  - Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig
  - Praktisch II: Schneller, abhänging von Anzahl verschiedener Eigenwerte
- Wenn nötig Matrix konditionieren
  $\Rightarrow$ Preconditioner
- Verschiedene Varianten, andere Bestimmung von β
  $\Rightarrow$ ggf. besseres Konvergenzverhalten

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:
  - Theoretisch: Nach n Schritten
  - Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig
  - Praktisch II: Schneller, abhänging von Anzahl verschiedener Eigenwerte
- Wenn nötig Matrix konditionieren
  $\Rightarrow$ Preconditioner
- Verschiedene Varianten, andere Bestimmung von β
  $\Rightarrow$ ggf. besseres Konvergenzverhalten
- Optimierung von Funktionen mit Nebenbedingungen:

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:
  - Theoretisch: Nach n Schritten
  - Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig
  - Praktisch II: Schneller, abhänging von Anzahl verschiedener Eigenwerte
- Wenn nötig Matrix konditionieren
  $\Rightarrow$ Preconditioner
- Verschiedene Varianten, andere Bestimmung von β
  $\Rightarrow$ ggf. besseres Konvergenzverhalten
- Optimierung von Funktionen mit Nebenbedingungen:
  - Lagrange-Multiplikatoren

Mathematische Optimierung
Konjugiertes Gradientenverfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kovergenz abhängig von Matrix (Konditionszahl)
- Konvergenz:
  - Theoretisch: Nach n Schritten
  - Praktisch I: Numerische Ungenauigkeiten machen mehr notwendig
  - Praktisch II: Schneller, abhänging von Anzahl verschiedener Eigenwerte
- Wenn nötig Matrix konditionieren
  $\Rightarrow$ Preconditioner
- Verschiedene Varianten, andere Bestimmung von β
  $\Rightarrow$ ggf. besseres Konvergenzverhalten
- Optimierung von Funktionen mit Nebenbedingungen:
  - Lagrange-Multiplikatoren
  - Nebenbedingungen werden mittels Kostenfunktion berücksichtigt

Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Metriken
  - 1-/2-Norm, HPWL, RSMT, RMST, LSE, Star+
- Timing-Analyse
- UPP
- Allgemeine Heuristiken
  - Nachbarsuche, Simulated Annealing, Tabu-Suche, Genetische Algorithmen, Ameisenalgorithmus
- Exakte Lösungsverfahren
  - Backtracking, Branch-and-Bound, Dynamic Programming, Linear Programming