Digitaltechnik – Kapitel 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Sarah Harris, Ph.D.
Fachgebiet Eingebettete Systeme und ihre Anwendungen (ESA)
Fachbereich Informatik

WS 13/14

Kapitel 2: Kombinatorische Logik

- Einleitung
- Boole'sche Gleichungen
- Boole'sche Algebra
- Von Logik zu Gattern
- Mehrstufige kombinatorische Logik
- X's und Z's
- Karnaugh Diagramme
- Kombinatorische Grundelemente
- Zeitverhalten

	Anwendungs-software	Programme
	Betriebs-systeme	Gerätetreiber
Inhalte dieser Veranstaltung	Architektur	Befehle Register
Inhalte dieser Veranstaltung	Mikro-architektur	Datenpfade Steuerung
Inhalte dieser Veranstaltung	Logik	Addierer Speicher
Inhalte dieser Veranstaltung	Digital-schaltungen	UND Gatter Inverter
	Analog-schaltungen	Verstärker Filter
	Bauteile	Transistoren Dioden
	Physik	Elektronen

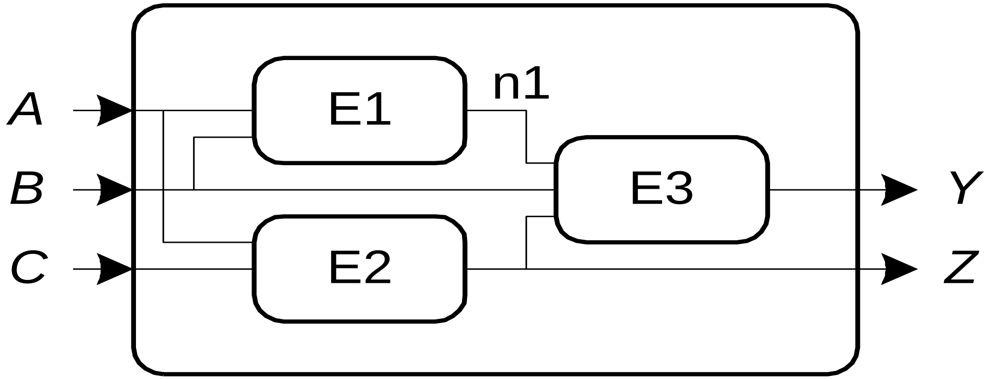
Einleitung

Eine logische Schaltung ist zusammengesetzt aus

- Eingängen
- Ausgängen
- Spezifikation der Funktion
- Spezifikation des Zeitverhaltens

Schaltungen

- Verbindungsknoten (*node*)
  - Eingangs-Terminals: *A*, *B*, *C*
  - Ausgangs-Terminals: *Y*, *Z*
  - Interne Knoten: n1
- Schaltungselemente
  - E1, E2, E3
  - Jedes wiederum eine Schaltung (Hierarchie!)

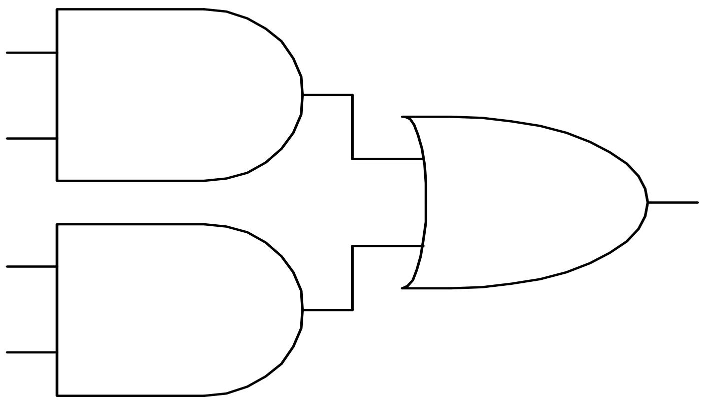


Arten von logischen Schaltungen

- **Kombinatorische Logik**
  - Zustandslos
  - Ausgänge hängen nur von aktuellen Eingangswerten ab
- **Sequentielle Logik**
  - Speichert einen Zustand
  - Ausgänge hängen ab von aktuellen Eingangswerten und gespeichertem Zustand
    - Also damit auch von vorherigen Eingangswerten

Regeln für kombinatorische Zusammensetzung

- Jedes Schaltungselement ist selbst kombinatorisch
- Jeder Verbindungsknoten der Schaltung ist entweder
  - … ein Eingang in die Schaltung
  - … oder an genau ein Ausgangsterminal eines Schaltungselements angeschlossen
- Die Schaltung enthält keine Zyklen
  - Jeder Pfad durch die Schaltung besucht jeden Verbindungsknoten maximal einmal
- Beispiel

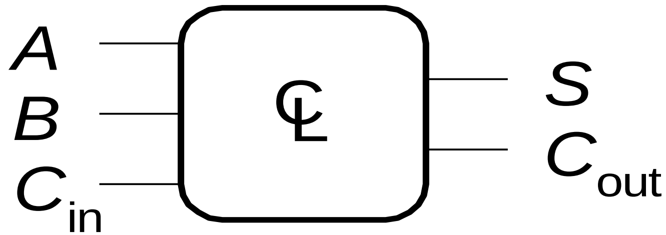


Boole'sche Gleichungen

- Beschreiben Ausgänge als Funktion der Eingänge

- Beispiel:

$$S \quad = F_1(A, B, C_{in})$$
$$C_{out} = F_2(A, B, C_{in})$$



$$S \quad = A \oplus B \oplus C_{in}$$
$$C_{out} = AB + AC_{in} + BC_{in}$$

Grundlegende Definitionen

- **Komplement:** Boole‘sche Variable mit einem Balken (invertiert)
  $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$
- **Literal:** Variable oder ihr Komplement
  A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$
- **Implikant:** Produkt von Literalen
  $AB\overline{C}$, $A\overline{C}$, BC
- **Minterm:** Produkt (UND, Konjunktion) über alle Eingangsvariablen
  ABC, $AB\overline{C}$, $\overline{A}BC$
- **Maxterm:** Summe (ODER, Disjunktion) über alle Eingangsvariablen
  $(A+\overline{B}+\overline{C})$, $(A+B+\overline{C})$, $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

Disjunktive Normalform (DNF)

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole’schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Minterm**
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale

Disjunktive Normalform (DNF)

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Minterm**
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale

A	*B*	*Y*	**minterm**	**minterm name**
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \overline{B}$	m_2
1	1	1	$A\ B$	m_3

Disjunktive Normalform (DNF)

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Minterm**
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale
- Der Minterm ist WAHR genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Disjunktion (Summe, ODER) der Minterme, die am Ausgang WAHR liefern
- Schema: Summe aus Produkten (SOP)

A	***B***	***Y***	**minterm**	**minterm name**
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \overline{B}$	m_2
1	1	1	$A\ B$	m_3

Disjunktive Normalform (DNF)

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Minterm**
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale
- Der Minterm ist WAHR genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Disjunktion (Summe, ODER) der Minterme, die am Ausgang WAHR liefern
- Schema: Summe aus Produkten (SOP)

A	B	Y	**minterm**	**minterm name**
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \overline{B}$	m_2
1	1	1	$A\ B$	m_3

$$Y = \mathrm{F}(A, B) =$$

Disjunktive Normalform (DNF)

- *Sum-of-products (SOP) form*
- Alle Boole'schen Funktionen können in DNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Minterm**
  - Jeder Minterm ist die Konjunktion (Produkt, UND) der Literale
- Der Minterm ist WAHR genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Disjunktion (Summe, ODER) der Minterme, die am Ausgang WAHR liefern
- Schema: Summe aus Produkten (SOP)

A	***B***	***Y***	**minterm**	**minterm name**
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \overline{B}$	m_2
1	1	1	$A\ B$	m_3

$$Y = F(A, B) = \overline{A}B + AB = \Sigma(1, 3)$$

Konjunktive Normalform (KNF)

- *Products-of-sums form (POS)*
- Alle Boole'schen Funktionen können in KNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Maxterm**
  - Jeder Maxterm ist die Disjunktion (Summe, ODER) von Literalen

Konjunktive Normalform (KNF)

- *Products-of-sums form (POS)*
- Alle Boole'schen Funktionen können in KNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Maxterm**
  - Jeder Maxterm ist die Disjunktion (Summe, ODER) von Literalen

A	*B*	*Y*	maxterm	maxterm name
0	0	0	$A + B$	M_0
0	1	1	$A + \overline{B}$	M_1
1	0	0	$\overline{A} + B$	M_2
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$	M_3

Konjunktive Normalform (KNF)

- *Products-of-sums form (POS)*
- Alle Boole'schen Funktionen können in KNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Maxterm**
  - Jeder Maxterm ist die Disjunktion (Summe, ODER) von Literalen
- Der Maxterm ist FALSCH genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Konjunktion (Produkt, UND) der Maxterme, die am Ausgang FALSCH liefern
- Schema: Produkt aus Summen (POS)

A	***B***	***Y***	**maxterm**	**maxterm name**
0	0	0	$A + B$	M_0
0	1	1	$A + \overline{B}$	M_1
1	0	0	$\overline{A} + B$	M_2
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$	M_3

Konjunktive Normalform (KNF)

- *Products-of-sums form (POS)*
- Alle Boole'schen Funktionen können in KNF formuliert werden
- Jede Zeile der Wahrheitstabelle enthält einen **Maxterm**
  - Jeder Maxterm ist die Disjunktion (Summe, ODER) von Literalen
- Der Maxterm ist FALSCH genau für diese eine Zeile
- Die Funktion wird beschrieben durch Konjunktion (Produkt, UND) der Maxterme, die am Ausgang FALSCH liefern
- Schema: Produkt aus Summen (POS)

A	*B*	*Y*	**maxterm**	**maxterm name**
0	0	0	$A + B$	M_0
0	1	1	$A + \overline{B}$	M_1
1	0	0	$\overline{A} + B$	M_2
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$	M_3

$$Y = \mathrm{F}(A, B) = (A + B)(A + \overline{B}) = \Pi(0, 2)$$

Beispiel für Boole'sche Funktion

- Sie prüfen das Mittagsangebot der Mensa
  - Sie werden dort nicht essen gehen ($\overline{E}$)
  - Wenn nicht mehr geöffnet ist ($\overline{O}$) oder
  - Es nur Corned Beef-Variationen gibt (C)
- Stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf, ob Sie in die Mensa gehen

O	C	E
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Beispiel für Boole’sche Funktion

- Sie prüfen das Mittagsangebot der Mensa
  - Sie werden dort nicht essen gehen ($\overline{E}$)
  - Wenn nicht mehr geöffnet ist ($\overline{O}$) oder
  - Es nur Corned Beef-Variationen gibt (C)
- Stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf, ob Sie in die Mensa gehen

O	C	E
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

DNF (*SOP*) und KNF (*POS*) Formen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **DNF** – Disjunktive Normalform (*sum-of-products, SOP)*

O	C	E	minterm
0	0	0	$\overline{O}\ \overline{C}$
0	1	0	$\overline{O}\ C$
1	0	1	$O\ \overline{C}$
1	1	0	$O\ C$

- **KNF** – Konjunktive Normalform (*product-of-sums, POS*)

O	C	Y	maxterm
0	0	0	$O + C$
0	1	0	$O + \overline{C}$
1	0	1	$\overline{O} + C$
1	1	0	$\overline{O} + \overline{C}$

Embedded Systems & Applications

DNF (*SOP*) und KNF (*POS*) Formen

- **DNF** – Disjunktive Normalform (*sum-of-products, SOP)*

O	C	E	minterm
0	0	0	$\overline{O}\ \overline{C}$
0	1	0	$\overline{O}\ C$
1	0	1	$O\ \overline{C}$
1	1	0	$O\ C$

$$E = O\overline{C}$$
$$= \Sigma(2)$$

- **KNF** – Konjunktive Normalform (*product-of-sums, POS*)

O	C	E	maxterm
0	0	0	$O + C$
0	1	0	$O + \overline{C}$
1	0	1	$\overline{O} + C$
1	1	0	$\overline{O} + \overline{C}$

$$E = (O + C)(O + \overline{C})(\overline{O} + \overline{C})$$
$$= \Pi(0, 1, 3)$$

Boole'sche Algebra

- **Axiome und Sätze**, hier zum Ziel die Vereinfachung boole'scher Gleichungen
- Wie die übliche Algebra
  - Teilweise einfacher, da hier nur zwei Werte

Boole'sche Algebra

- **Axiome und Sätze**, hier zum Ziel der Vereinfachung boole'scher Gleichungen
- Wie die übliche Algebra
  - Teilweise einfacher, da hier nur zwei Werte

- Axiome und Sätze haben jeweils **duale Entsprechung**:
  - Tausche AND/OR, tausche 0/1

Axiome der Boole'schen Algebra

Nummer	Axiom	Name
A1	$B = 0$ if $B \neq 1$	Dualitätsgesetz
A2	$\overline{0} = 1$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	AND/OR

Axiome der Boole'schen Algebra

Nummer	Axiom	Name
A1	$B = 0$ if $B \neq 1$	Dualitätsgesetz
A2	$\overline{0} = 1$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	AND/OR

Dual: Tausche: • mit +

0 mit 1

Axiome der Boole'schen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Nummer	Axiom	Dual	Name
A1	$B = 0$ if $B \neq 1$	$B = 1$ if $B \neq 0$	Dualitätsgesetz
A2	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	$1 + 1 = 1$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	$0 + 0 = 0$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	AND/OR

Dual: Tausche: • mit +
0 mit 1

Embedded Systems & Applications

Sätze der Boole'schen Algebra

Nr.	Satz	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	Neutralitätsgesetz
T2	$B \bullet 0 = 0$	Extremalgesetz
T3	$B \bullet B = B$	Idempotenzgesetz
T4	$\overline{\overline{B}} = B$	Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	Komplementärgesetz

Sätze der Boole'schen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Nr.	Satz	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	Neutralitätsgesetz
T2	$B \bullet 0 = 0$	Extremalgesetz
T3	$B \bullet B = B$	Idempotenzgesetz
T4	$\overline{\overline{B}} = B$	Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	Komplementärgesetz

Dual: Tausche: • mit +
0 mit 1

Embedded Systems & Applications

Sätze der Boole'schen Algebra

Nr.	Satz	Dual	Name
T1	$B \cdot 1 = B$	$B + 0 = B$	Neutralitätsgesetz
T2	$B \cdot 0 = 0$	$B + 1 = 1$	Extremalgesetz
T3	$B \cdot B = B$	$B + B = B$	Idempotenzgesetz
T4	$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \cdot \overline{B} = 0$	$B + \overline{B} = 1$	Komplementärgesetz

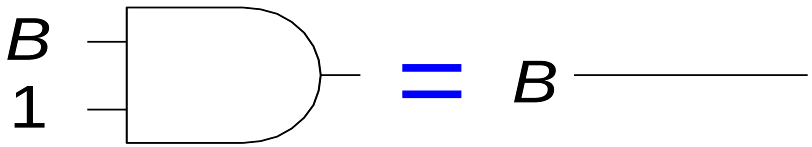
Dual: Tausche: • mit +
0 mit 1

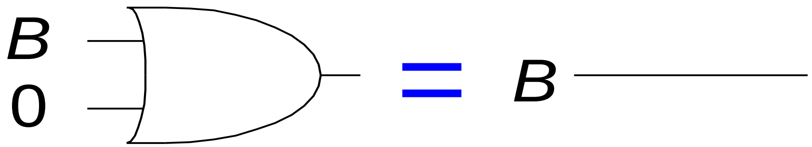
T1: Neutralitätsgesetz

- B ● 1 =
- B + 0 =

T1: Neutralitätsgesetz

- $B \bullet 1 = B$
- $B + 0 = B$



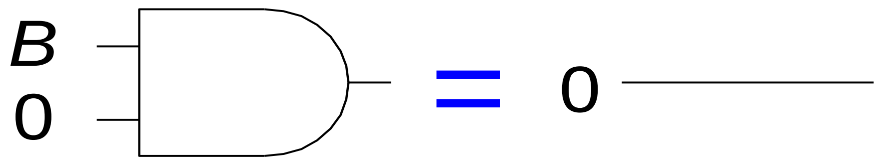


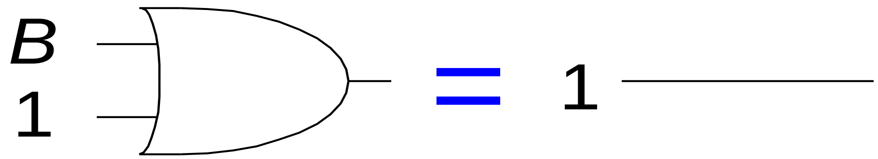
T2: Extremalgesetz

- $B \bullet 0 =$
- $B + 1 =$

T2: Extremalgesetz

- B ● 0 = 0
- B + 1 = 1



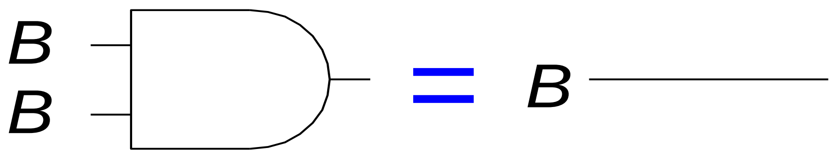


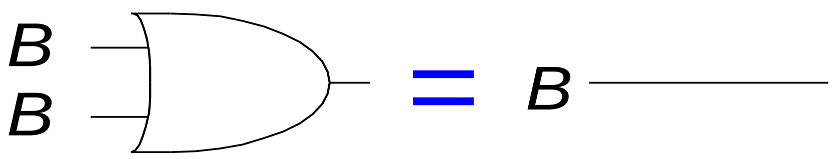
T3: Idempotenzgesetz

- B ● B =
- B + B =

T3: Idempotenzgesetz

- B • B = B
- B + B = B



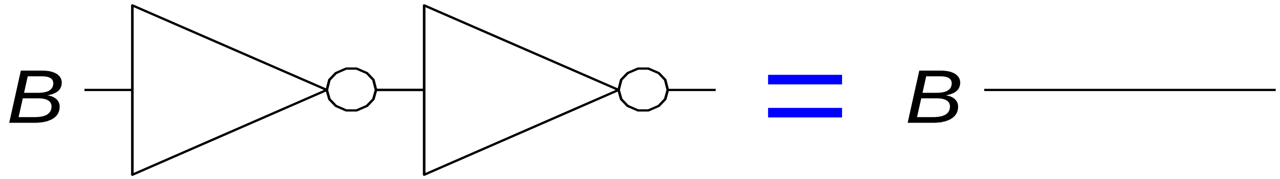


T4: Involution (Selbstinversion)

- $\overline{\overline{B}} =$

T4: Involution (Selbstinversion)

- $\overline{\overline{B}} = B$

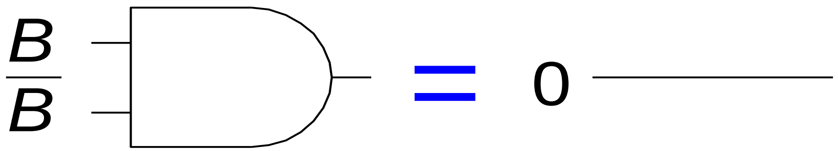


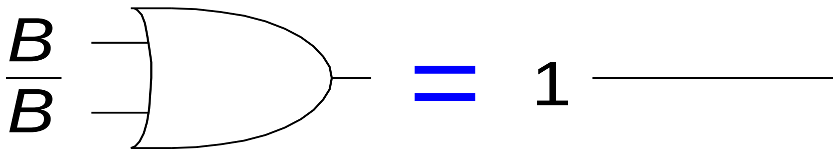
T5: Komplementärgesetz

- $B \bullet \overline{B} =$
- $B + \overline{B} =$

T5: Komplementärgesetz

- $B \bullet \overline{B} = 0$
- $B + \overline{B} = 1$





Sätze der Boole'schen Algebra mit einer Variablen

Nr.	Satz	Dual	Name
T1	$B \cdot 1 = B$	$B + 0 = B$	Neutralitätsgesetz
T2	$B \cdot 0 = 0$	$B + 1 = 1$	Extremalgesetz
T3	$B \cdot B = B$	$B + B = B$	Idempotenzgesetz
T4	$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \cdot \overline{B} = 0$	$B + \overline{B} = 1$	Komplementärgesetz

Sätze der Boole'schen Algebra mit mehreren Variablen

Nr.	Satz	Name
T6	B•C = C•B	**Kommutativgesetz**
T7	(B•C) • D = B • (C • D)	**Assoziativgesetz**
T8	B • (C + D) = (B•C) + (B•D)	**Distributivgesetz**
T9	B• (B+C) = B	**Absorptionsgesetz**
T10	(B•C) + (B•$\overline{C}$) = B	**Zusammenfassen**
T11	(B•C) + ($\overline{B}$•D) + (C•D) = (B•C) + ($\overline{B}$•D)	**Konsensusregeln**

Sätze der Boole'schen Algebra mit mehreren Variablen

Nr.	Satz	Name
T6	$B \cdot C = C \cdot B$	**Kommutativgesetz**
T7	$(B \cdot C) \cdot D = B \cdot (C \cdot D)$	**Assoziativgesetz**
T8	$B \cdot (C + D) = (B \cdot C) + (B \cdot D)$	**Distributivgesetz**
T9	$B \cdot (B+C) = B$	**Absorptionsgesetz**
T10	$(B \cdot C) + (B \cdot \overline{C}) = B$	**Zusammenfassen**
T11	$(B \cdot C) + (\overline{B} \cdot D) + (C \cdot D) = (B \cdot C) + (\overline{B} \cdot D)$	**Konsensusregeln**

Wie bestimmt man, ob die Aussagen wahr sind?

Wie beweisen wir die Sätze?

- **Methode 1:** vollständige Induktion
- **Methode 2:** die Gleichung vereinfachen
  - andere Axiome und Sätze verwenden
  - bis beide Seiten gleich sind

Beispiel 1: vollständige Induktion

Nr.	Satz	Name
T6	B•C = C•B	**Kommutativgesetz**

B	***C***	***BC***	***CB***
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Beispiel 1: vollständige Induktion

Nr.	Satz	Name
T6	B•C = C•B	**Kommutativgesetz**

B	*C*	*BC*	*CB*
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Beispiel 2: Absorptionsgesetz

Nr	Satz	Name
T9	B• (B+C) = B	Absorptionsgesetz

Wahrheit prüfen durch:

- **Methode 1:** vollständige Induktion
- **Methode 2:** die Gleichung vereinfachen

Beispiel 2: Absorptionsgesetz

Nr	Satz	Name
T9	B• (B+C) = B	Absorptionsgesetz

- **Methode 1:** vollständige Induktion

B	*C*	*(B+C)*	*B(B+C)*
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Beispiel 2: Absorptionsgesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Nr	Satz	Name
T9	B• (B+C) = B	Absorptionsgesetz

- **Methode 1:** vollständige Induktion

B	C	$(B+C)$	$B(B+C)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Embedded Systems & Applications

Beispiel 3: Absorptionsgesetz

Nr	Satz	Name
T9	B• (B+C) = B	Absorptionsgesetz

- **Methode 2:** die Gleichung vereinfachen

B•(B+C)

Beispiel 3: Absorptionsgesetz

Nr	Satz	Name
T9	$B \bullet (B+C) = B$	Absorptionsgesetz

- **Methode 2:** die Gleichung vereinfachen

$B \bullet (B+C)$

$= B \bullet B + B \bullet C$	T8: Distributivgesetz
$= \mathbf{B} + B \bullet C$	T3: Idempotenzgesetz
$= B \bullet (1 + C)$	T8: Distributivgesetz
$= B \bullet (\mathbf{1})$	T2: Extremalgesetz
$= B$	T1: Neutralitätsgesetz

Beispiel 4: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

- $Y = AB + \overline{A}B$

Beispiel 4: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

- $Y = AB + \overline{A}B$

$= B(A + \overline{A})$	T8	Distributivgesetz
$= B(1)$	T5'	Komplementärgesetz
$= B$	T1	Neutralitätsgesetz

Beispiel 5: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

- $Y \quad = A(AB + ABC)$

Beispiel 5: Vereinfachen von Boole'schen Ausdrücken

- $Y = A(AB + ABC)$

$= A(AB(1 + C))$	T8 Distributivgesetz
$= A(AB(1))$	T2' Extremalgesetz
$= A(AB)$	T1 Neutralitätsgesetz
$= (AA)B$	T7 Assoziativgesetz
$= AB$	T3 Idempotenzgesetz

Sätze der Boole'schen Algebra mit mehreren Variablen

Nr.	Satz	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	**Kommutativgesetz**
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	**Assoziativgesetz**
T8	$B \bullet (C + D) = (B \bullet C) + (B \bullet D)$	**Distributivgesetz**
T9	$B \bullet (B+C) = B$	**Absorptionsgesetz**
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	**Zusammenfassen**
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) =$ $(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D)$	**Konsensusregeln**

Sätze der Boole'schen Algebra mit mehreren Variablen

Nr.	Theorem	Dual	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	$B+C = C+B$	Kommutativgesetz
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Assoziativgesetz
T8	$B \bullet (C + D) = (B \bullet C) + (B \bullet D)$	$B + (C \bullet D) = (B+C)\ (B+D)$	Distributivgesetz
T9	$B \bullet (B+C) = B$	$B + (B \bullet C) = B$	Absorptionsgesetz
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	$(B+C) \bullet (B+\overline{C}) = B$	Zusammenfassen
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) =$ $(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D)$	$(B+C) \bullet (\overline{B}+D) \bullet (C+D) =$ $(B+C) \bullet (\overline{B}+D)$	Konsensusregeln

Dual: Austauschen: • mit +
0 mit 1

Sätze der Boole'schen Algebra mit mehreren Variablen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Nr.	Theorem	Dual	Name
T6	B•C = C•B	B+C = C+B	Kommutativgesetz
T7	(B•C) • D = B • (C•D)	(B + C) + D = B + (C + D)	Assoziativgesetz
T8	B • (C + D) = (B•C) + (B•D)	B + (C•D) = (B+C) (B+D)	Distributivgesetz
T9	B • (B+C) = B	B + (B•C) = B	Absorptionsgesetz
T10	(B•C) + (B•$\overline{C}$) = B	(B+C) • (B+$\overline{C}$) = B	Zusammenfassen
T11	(B•C) + ($\overline{B}$•D) + (C•D) = (B•C) + ($\overline{B}$•D)	(B+C) • ($\overline{B}$+D) • (C+D) = (B+C) • ($\overline{B}$+D)	Konsensusregeln

Warnung: T8' ist mit normaler Algebra ungleich:
ODER (+) wird über UND (•) verteilt

Embedded Systems & Applications

Vereinfachen von Gleichungen

- Mehrere Beispiele am Ende der Folien

De Morgan'sches Gesetz

Nr.	Satz	Name
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots$	DeMorgansche Gesetz

Das **Komplement** des **Produkts**
ist die
Summe der **Komplementen.**

De Morgan'sches Gesetz

Nr.	Theorem	Dual	Name
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots$	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots} = \overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots$	DeMorgansche Gesetz

De Morgan'sches Gesetz

Nr.	Theorem	Dual	Name
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots$	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots} = \overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots$	DeMorgansche Gesetz

Das Komplement des Produkts
ist die
Summe der Komplementen.

De Morgan'sches Gesetz

Nr.	Theorem	Dual	Name
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots$	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots} = \overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots$	DeMorgansche Gesetz

Das Komplement des Produkts
ist die
Summe der Komplementen.

Dual: Das **Komplement** der **Summe**
ist das
Produkt der **Komplementen**.

Beispiel 1: De Morgan'sche Gesetze

$$Y = \overline{(A+\overline{BD})\overline{C}}$$

Beispiel 1: De Morgan'sche Gesetze

$$Y = \overline{(A+\overline{BD})\overline{C}}$$

$$= \overline{(A+\overline{BD})} + \overline{\overline{C}}$$

$$= (\overline{A}\bullet(\overline{\overline{BD}})) + C$$

$$= (\overline{A}\bullet(BD)) + C$$

$$= \overline{A}BD + C$$

Beispiel 2: De Morgan'sche Gesetze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$Y = \overline{(\overline{AC}E+\overline{D}) + B}$$

Beispiel 2: De Morgan'sche Gesetze

$$Y = \overline{(\overline{AC}E+\overline{D}) + B}$$

$$= \overline{(\overline{AC}E+\overline{D})} \bullet \overline{B}$$

$$= (\overline{\overline{AC}E} \bullet \overline{\overline{D}}) \bullet \overline{B}$$

$$= ((\overline{\overline{AC}}+\overline{E}) \bullet D) \bullet \overline{B}$$

$$= ((AC+\overline{E}) \bullet D) \bullet \overline{B}$$

$$= (AC\overline{D} + D\overline{E}) \bullet \overline{B}$$

$$= A\overline{B}CD + \overline{B}D\overline{E}$$

Wichtige Mitteilungen

- die Klausur
- Selbsttest
- SystemVerilog Live Demo

Die Klausur

- Übungen selbst durcharbeiten (auf Papier!)
- an die Übungsgruppen teilnehmen
- keine Hilfsmittel
- Sprechstunden besuchen – jetzt (nicht warten bis zum Ende)
- in vorgehenden Jahren bis zu 50% durchgefallen

Vorbereitung für die Klausur

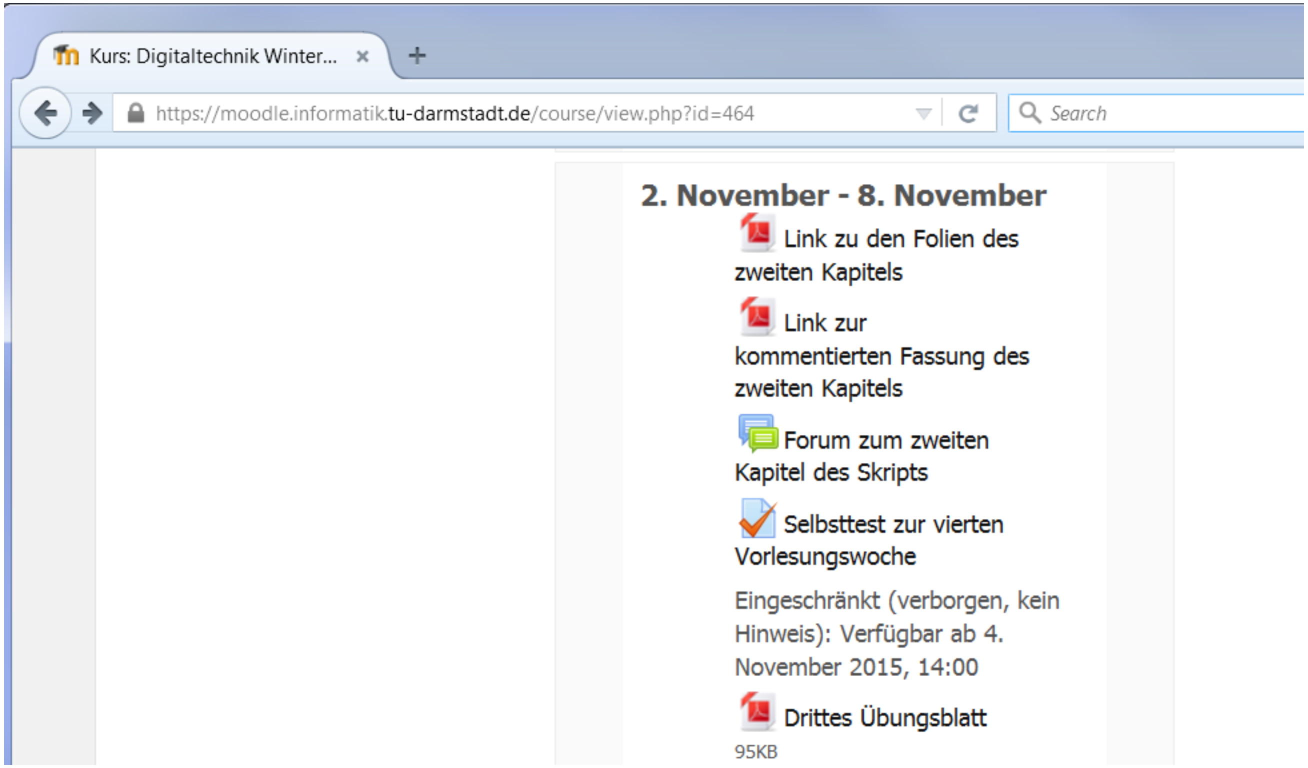
„Ich höre und ich vergesse.

Ich sehe und ich erinnere mich.

Ich tue und ich verstehe.”

- Xunzi

Selbsttest bei Moodle

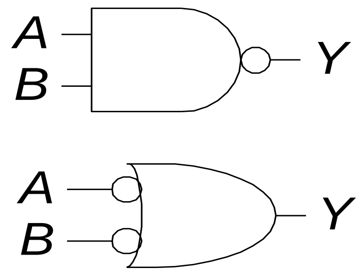


SystemVerilog Live Demo

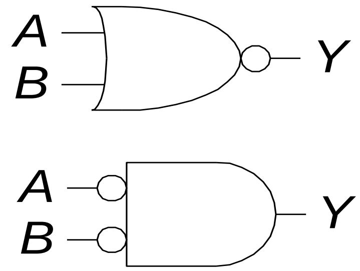
- 10. Dezember 2015 (Donnerstag)
- 16:15 Uhr
- SystemVerilog:
  - Demo
  - Simulieren
  - Synthesis
  - u.s.w....

De Morgan'sche Gesetze

- $Y = \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$



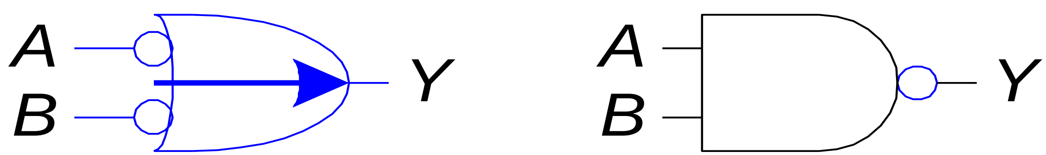
- $Y = \overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$



Invertierungsblasen verschieben (*bubble pushing*)

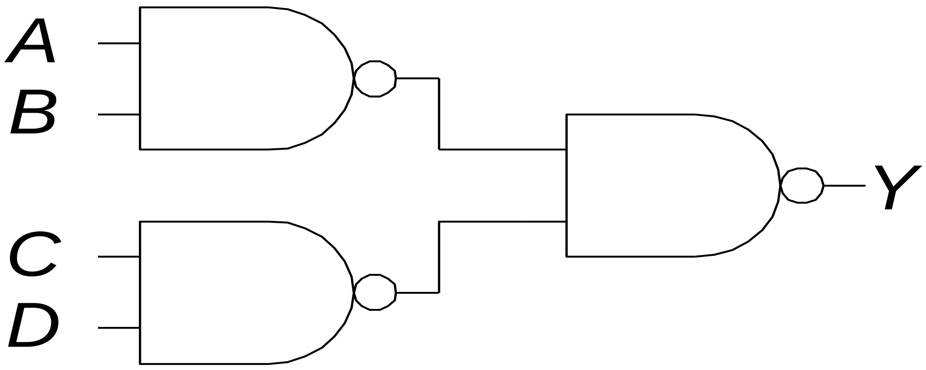
- **Blasen rückwärts Verschieben (vom Ausgang)**
  - Art des Gatters ändert sich: von AND nach OR (oder umgekehrt)
  - Blasen an allen Eingängen

- **Blasen vorwärts Verschieben (vom Eingang)**
  - Art des Gatters ändert sich: von AND nach OR (oder umgekehrt)
  - Blasen an Ausgang
  - Müssen Blasen an allen Eingängen gewesen sein



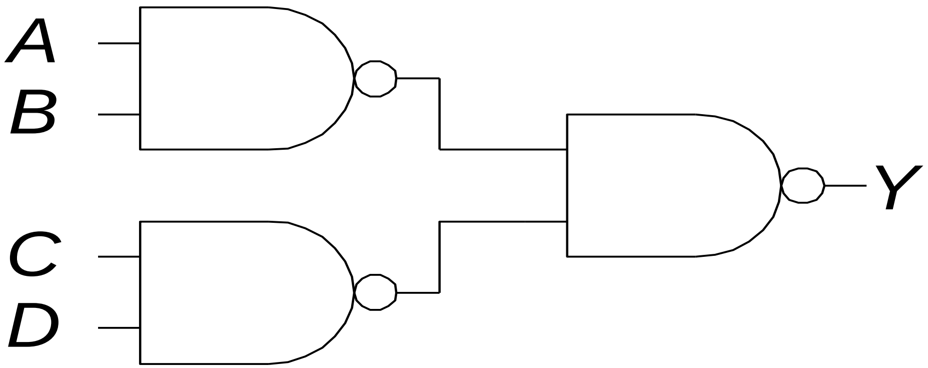
Invertierungsblasen verschieben

Was ist die boole'sche Funktion dieser Schaltung?



Invertierungsblasen verschieben

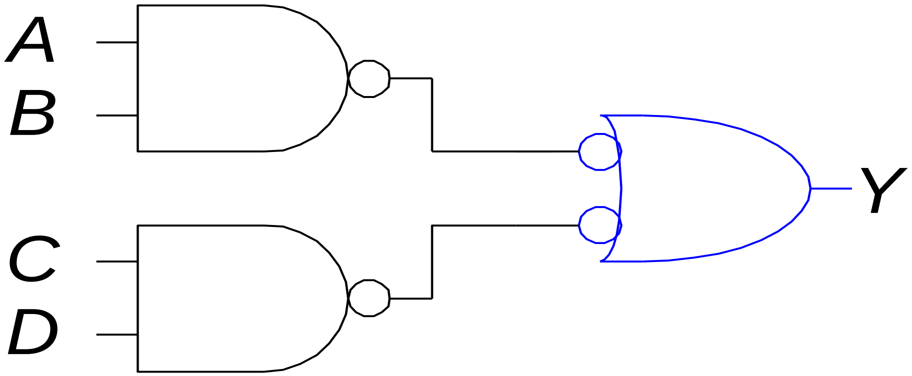
Was ist die boole'sche Funktion dieser Schaltung?



Invertierungsblasen verschieben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Was ist die boole'sche Funktion dieser Schaltung?

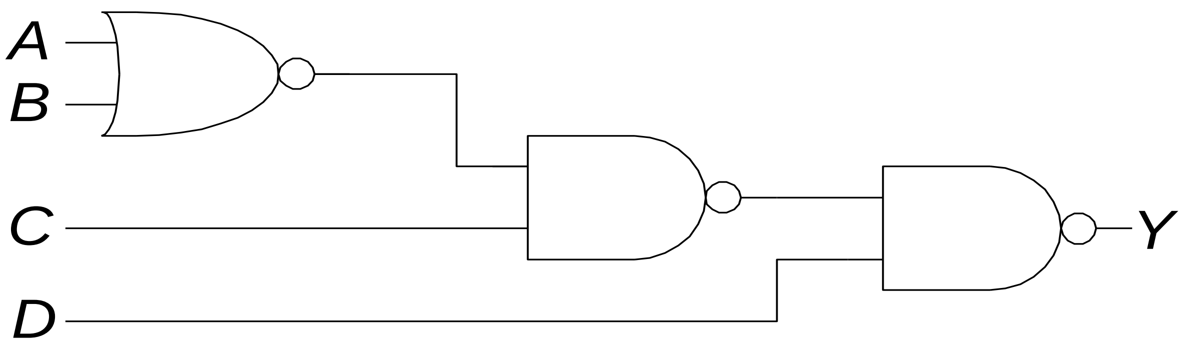


$Y = AB + CD$

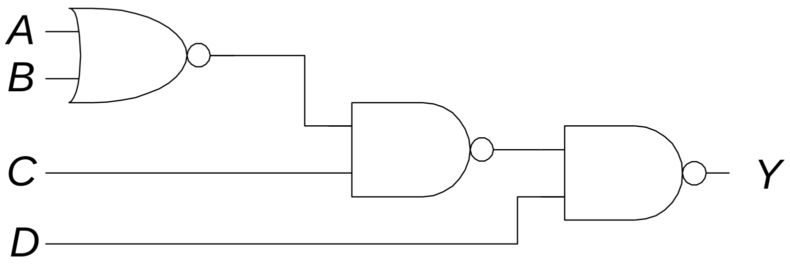
Embedded Systems & Applications

Regeln für das Verschieben von Invertierungsblasen

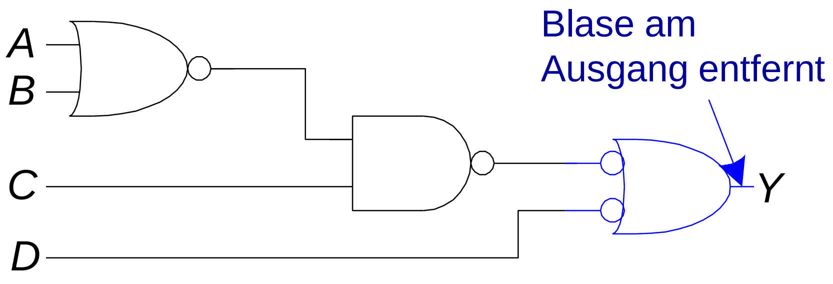
- Beginne am Ausgang, vorarbeiten Richtung Eingänge
- Schiebe Blasen am Ausgang Richtung Eingang
- Tausche Art des Gatters aus (AND/OR)
- Versuche Blasen auszulöschen (zwei Blasen auf einer Leitung)
  - Wenn Eingang Blase hat, versuche Ausgang mit Blase zu versehen
  - … und umgekehrt



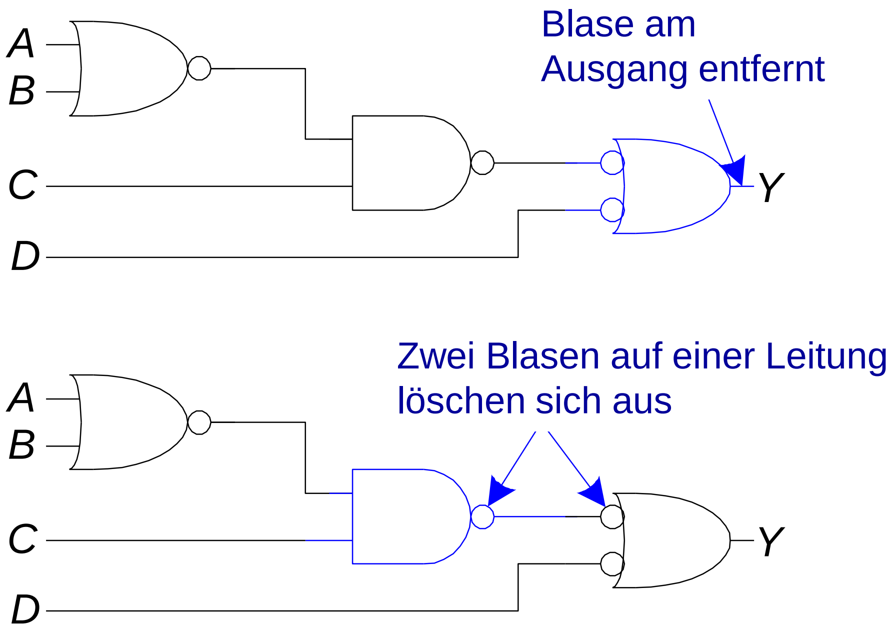
Beispiel: Invertierungsblasen verschieben



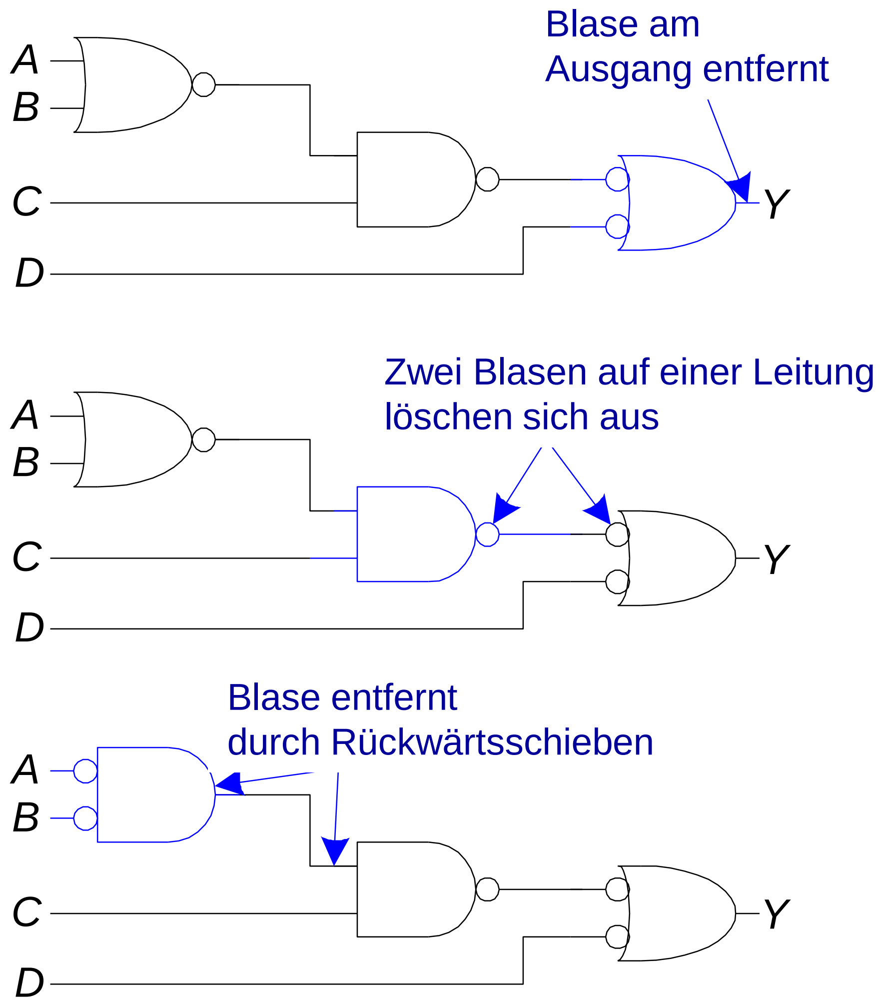
Beispiel: Invertierungsblasen verschieben



Beispiel: Invertierungsblasen verschieben



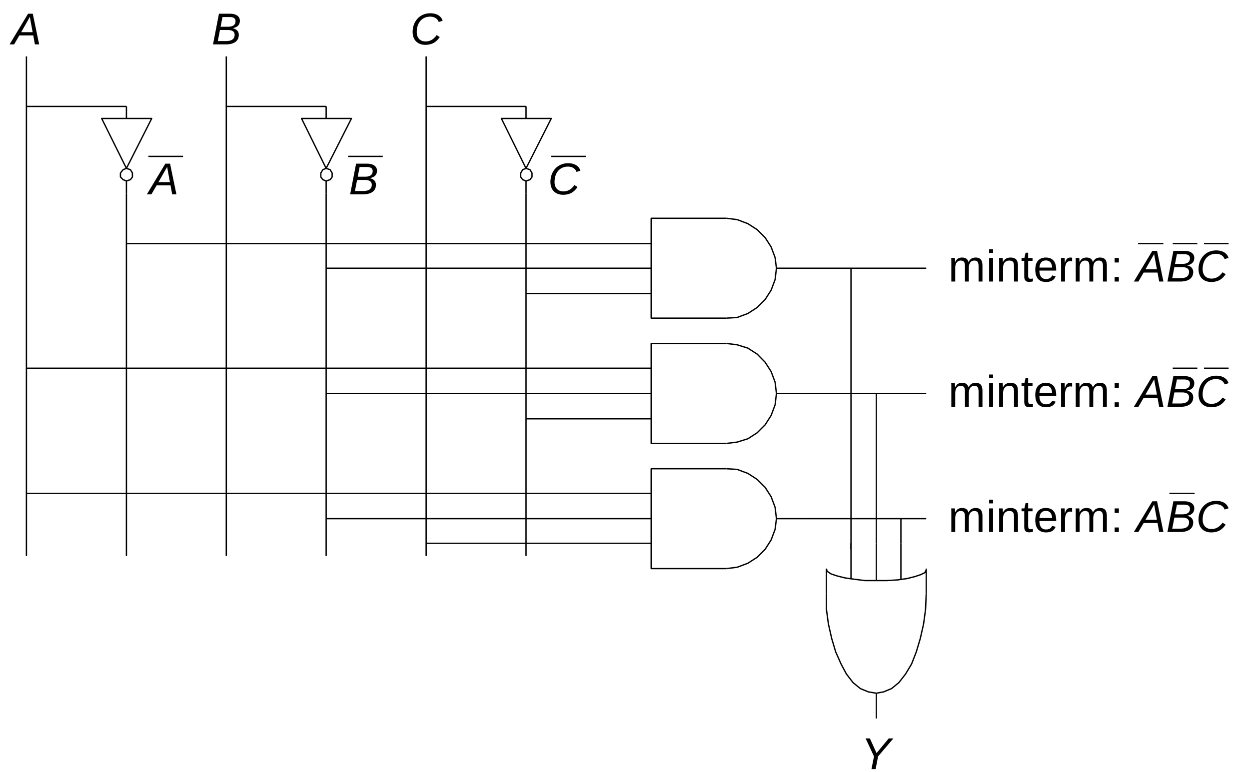
Beispiel: Invertierungsblasen verschieben



$$Y = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{D}$$

Von Logik zu Gattern

- **Zweistufige Logik:** ANDs gefolgt von ORs
- **Beispiel:** $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$



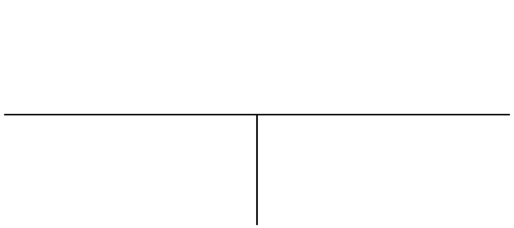
Lesbare Schaltpläne

- **Eingänge** auf der **linken** (oder oberen) Seite
- **Ausgänge** auf der **rechten** (oder unteren) Seite
- **Gatter** von **links nach rechts** angeordnet
  - In seltenen Fällen: Von oben nach unten
- **Gerade Verbindungen** sind leichter lesbar als abknickende
  - Gegebenenfalls gerade lange Verbindung statt kurzer abgeknickter

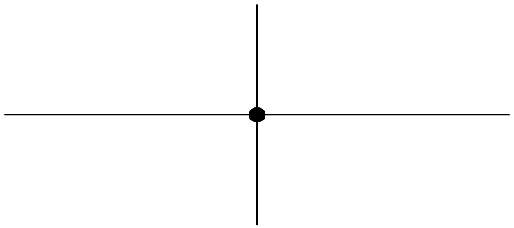
Regeln für Schaltpläne

- Drähte an T-Kreuzung sind verbunden
- Sich überkreuzende Drähte werden durch Punkt als verbunden markiert
- Sich überkreuzende Drähte ohne Punkt sind **nicht** verbunden

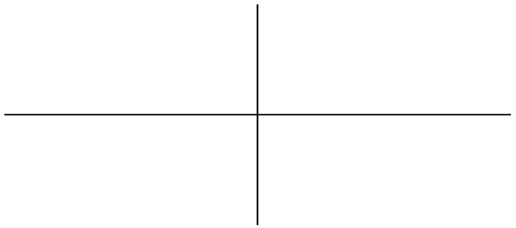
T-Kreuzung:
verbunden



Überkreuzend:
verbunden

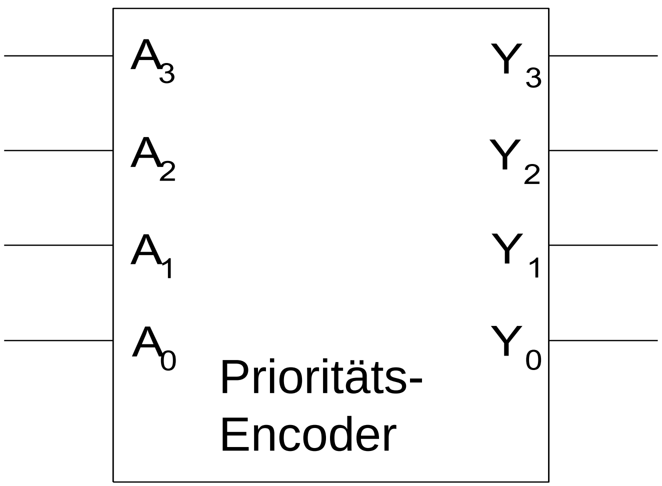


Überkreuzend:
Nicht verbunden



Schaltungen mit mehreren Ausgängen

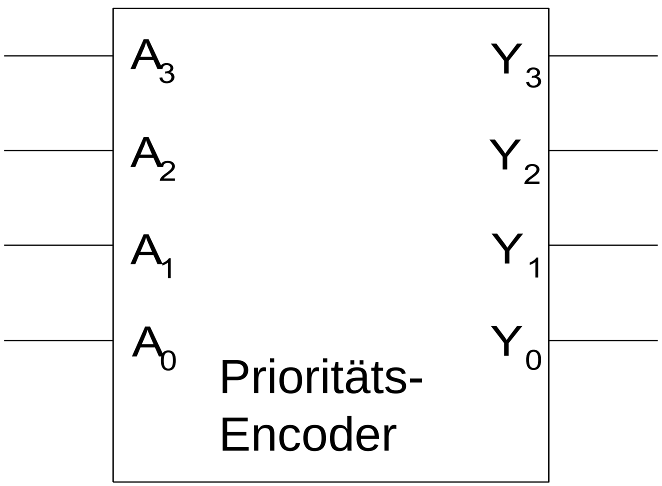
- Ausgang entsprechend dem höchstwertigen gesetzten Eingangsbit wird auf TRUE gesetzt



A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

Schaltungen mit mehreren Ausgängen

- Ausgang entsprechend dem höchstwertigen gesetzten Eingangsbit wird auf TRUE gesetzt



A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Aufbau des Prioritäts-Encoders

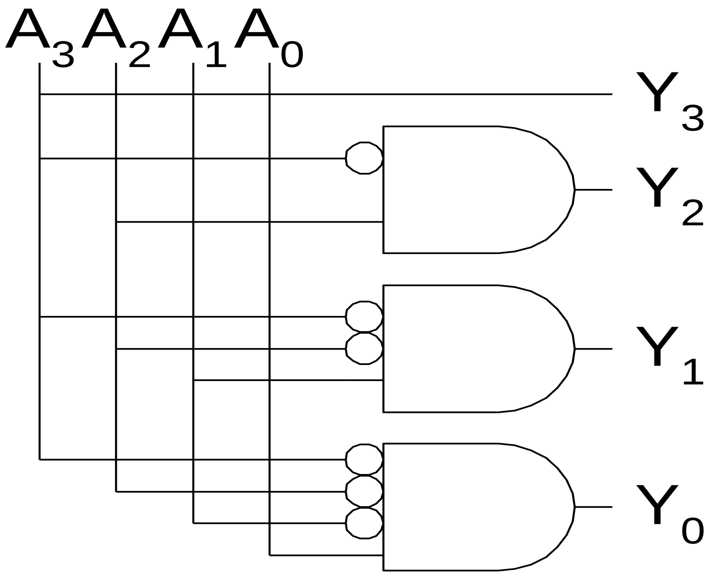
A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Aufbau des Prioritäts-Encoders

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Aufbau des Prioritäts-Encoders

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0



Aufbau des Prioritäts-Encoders

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**1**
0	0	1	0	**0**	**0**	**1**	**0**
0	0	1	1	**0**	**0**	**1**	**0**
0	1	0	0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	0	1	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	1	0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	1	1	**0**	**1**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	1	**1**	**0**	**0**	**0**
1	0	1	0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	0	1	1	**1**	**0**	**0**	**0**
1	1	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	1	0	1	**1**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	1	**1**	**0**	**0**	**0**

Ignorierbare Bits (*“Don’t Cares”*)

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	0	1	**0**	**0**	**0**	1
0	0	1	0	**0**	**0**	1	**0**
0	0	1	1	**0**	**0**	1	**0**
0	1	0	0	**0**	1	**0**	**0**
0	1	0	1	**0**	1	**0**	**0**
0	1	1	0	**0**	1	**0**	**0**
0	1	1	1	**0**	1	**0**	**0**
1	0	0	0	1	**0**	**0**	**0**
1	0	0	1	1	**0**	**0**	**0**
1	0	1	0	1	**0**	**0**	**0**
1	0	1	1	1	**0**	**0**	**0**
1	1	0	0	1	**0**	**0**	**0**
1	1	0	1	1	**0**	**0**	**0**
1	1	1	0	1	**0**	**0**	**0**
1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	0	1	**0**	**0**	**0**	1
0	0	1	X	**0**	**0**	1	**0**
0	1	X	X	**0**	1	**0**	**0**
1	X	X	X	1	**0**	**0**	**0**

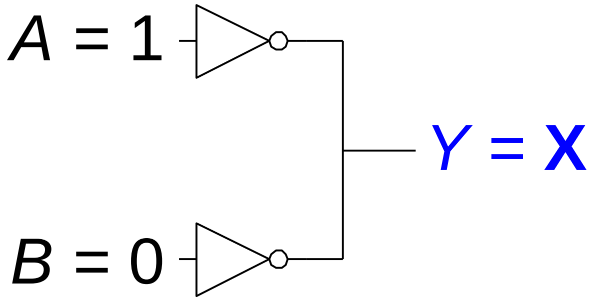
Konkurrierende Treiber: X

Konflikt: Schaltung treibt eine Leitung/Ausgang gleichzeitig auf 0 und 1

Konkurrierende Treiber: X

Konflikt: Schaltung treibt eine Leitung/Ausgang gleichzeitig auf 0 und 1

- Analogwert liegt irgendwo dazwischen (Spannungsteilung)
- Kann 0 oder 1 sein, oder im verbotenen Bereich liegen
- Kann auch mit Betriebsspannung, Temperatur, Rauschen etc. variieren
- Verursacht hohen Energieverbrauch (Kurzschluss)



Konkurrierende Treiber: X

Konflikt: Schaltung treibt eine Leitung/Ausgang gleichzeitig auf 0 und 1

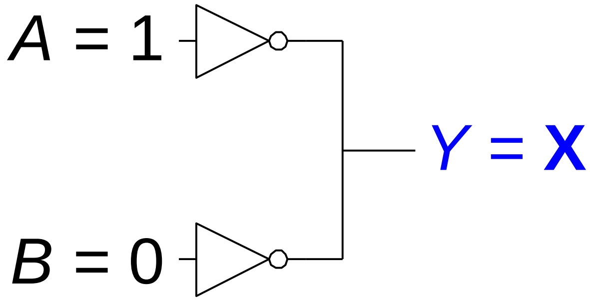
- Analogwert liegt irgendwo dazwischen (Spannungsteilung)
- Kann 0 oder 1 sein, oder im verbotenen Bereich liegen
- Kann auch mit Betriebsspannung, Temperatur, Rauschen etc. variieren
- Verursacht hohen Energieverbrauch (Kurzschluss)

Treiberkonflikt ist fast immer ein Entwurfsfehler

- Beheben!

Vorsicht: X steht für “don’t care” und Treiberkonflikt

- Nicht das gleiche!
- Kontext anschauen, um korrekte Bedeutung zu ermitteln



Hochohmiger Ausgang: Z

Auch genannt:

- Offen, ungetrieben
- *Floating, open, high-impedance*

Hochohmiger Ausgang: Z

Auch genannt:

- Offen, ungetrieben
- *Floating, open, high-impedance*

Kann 0 oder 1 sein, oder irgendwo dazwischen liegen

- Leitung hat keinen aktiven Treiber

Hochohmiger Ausgang: Z

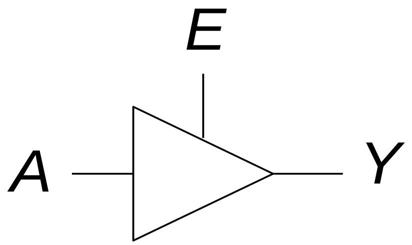
Auch genannt:

- Offen, ungetrieben
- *Floating, open, high-impedance*

Kann 0 oder 1 sein, oder irgendwo dazwischen liegen

- Leitung hat keinen aktiven Treiber

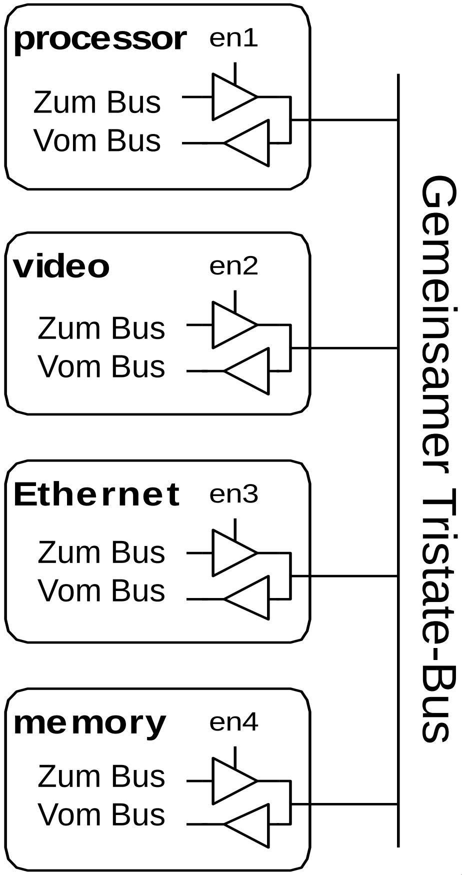
Tristate Buffer



E	*A*	*Y*
0	0	Z
0	1	Z
1	0	0
1	1	1

Tristate-Busse

- Hochohmige Knoten können zu Tristate-Bussen verschaltet werden
  - Viele verschiedene Treiber
  - Aber zu jedem Zeitpunkt ist genau einer aktiv
  - Der Rest ist hochohmig (Z)



Karnaugh Diagramme (*Karnaugh maps*)

- Boole’sche Ausdrücke können durch Zusammenfassen minimiert werden
- Karnaugh-Diagramme stellen Zusammenhänge graphisch dar
  - Bilden Ausgangspunkt für eine Minimierung
- Idee: $PA + P\overline{A} = P$

Karnaugh Diagramme (*Karnaugh maps*)

- Boole’sche Ausdrücke können durch Zusammenfassen minimiert werden
- Karnaugh-Diagramme stellen Zusammenhänge graphisch dar
  - Bilden Ausgangspunkt für eine Minimierung
- Idee: $PA + P\overline{A} = P$

A	B	C	Y
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Y — C \ AB	00	01	11	10
0	$\boldsymbol{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\boldsymbol{\bar{A}\bar{B}C}$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

Karnaugh Diagramme (*Karnaugh maps*)

- Boole'sche Ausdrücke können durch Zusammenfassen minimiert werden
- Karnaugh-Diagramme stellen Zusammenhänge graphisch dar
  - Bilden Ausgangspunkt für eine Minimierung
- Idee: $PA + P\overline{A} = P$

A	B	C	Y
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Y: C \ AB	00	01	11	10
0	**1**	0	0	0
1	**1**	0	0	0

Y: C \ AB	00	01	11	10
0	$\boldsymbol{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\boldsymbol{\bar{A}\bar{B}C}$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

Minimierung mit Karnaugh Diagrammen

- Markiere 1en in benachbarten Plätzen und bilde viereckigen Bereich
  - Jeder Platz steht für einen Minterm
- Lasse markierte Literale
  - … die im Bereich normal und als Komplement auftauchen, im Produkt weg

A	B	C	Y
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Y / C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = \overline{A}\,\overline{B}$$

Karnaugh Diagramm mit drei Eingängen

Y: C \ AB	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

Truth Table

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	0

K-Map

Y: C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Karnaugh Diagramm mit drei Eingängen

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

Truth Table

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

K-Map

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	0	0

$$Y = \overline{A}B + B\overline{C}$$

Karnaugh Diagramme: Definitionen

- **Komplement:** Variable mit Balken (invertierter Wert)
  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$
- **Literal:** Variable oder ihr Komplement
  $A, \overline{A}, B, \overline{B}, C, \overline{C}$
- **Implikant:** Produkt (UND) von Literalen
  $ABC, A\overline{C}, \overline{B}C$

- **Primimplikant**
  - Implikant der größten zusammenhängenden viereckigen Fläche im Karnaugh-Diagramm

Minimierungsregeln für Karnaugh-Diagramme

- Jede 1 in einem K-Diagramm muss mindestens einmal markiert werden
  - Ist damit Bestandteil eines oder mehrerer viereckiger Bereiche
- Jeder viereckige Bereich hat als Seitenlänge eine Zweierpotenz an Flächen
  - 1,2,4,… Flächen Seitenlänge
  - Beide Seiten dürfen aber unterschiedlich lang sein
- Jeder Bereich muss so groß wie möglich sein (Primimplikant)
- Ein Bereich darf um die Ränder des K-Diagrammes herum reichen
- Ein “don't care” (X) darf markiert werden, wenn es die Fläche größer macht
- Ziel: Möglichst wenige Primimplikanten zur Abdeckung aller 1en

Karnaugh-Diagramm mit vier Eingängen

A	*B*	*C*	*D*	*Y*
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Y

CD \ *AB*	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Karnaugh-Diagramm mit vier Eingängen

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Y

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	1

Karnaugh-Diagramm mit vier Eingängen

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Y

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	1

$$Y = \overline{A}C + \overline{A}BD + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D}$$

Karnaugh-Diagramm mit “don’t cares”

A	*B*	*C*	*D*	*Y*
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	X
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Y

CD \ *AB*	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Karnaugh-Diagramm mit “don’t cares”

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	X
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Y

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	0	X	X	1
11	1	1	X	X
10	1	1	X	X

Karnaugh-Diagramm mit “don’t cares”

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	X
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Y

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	0	X	X	1
11	1	1	X	X
10	1	1	X	X

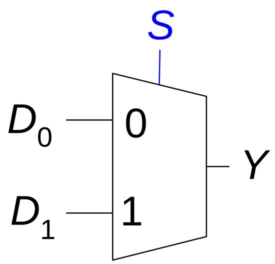
$$Y = A + \overline{B}\,\overline{D} + C$$

Kombinatorische Grundelemente

- Multiplexer
- Dekodierer (*Decoders*)

Multiplexer (Mux)

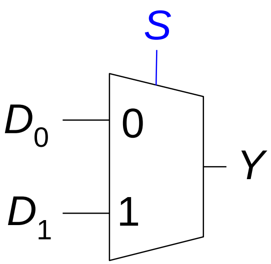
- Wählt einen von *N* Eingängen aus und verbindet ihn auf den Ausgang
- $\log_2 N$-bit Selektor-Eingang (*select input*), Steuereingang
- Beispiel: 2:1 Mux



S	D_1	D_0	Y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Multiplexer (Mux)

- Wählt einen von *N* Eingängen aus und verbindet ihn auf den Ausgang
- $\log_2 N$-bit Selektor-Eingang (*select input*), Steuereingang
- Beispiel: 2:1 Mux



S	D_1	D_0	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

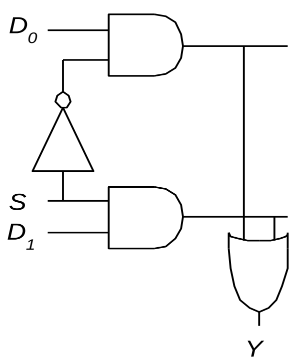
S	Y
0	D_0
1	D_1

Implementierung von Multiplexern

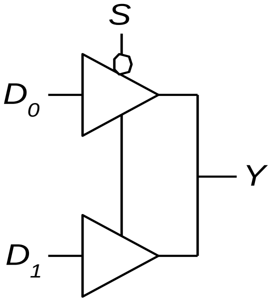
- Aus Logikgattern
  - Disjunktive Normal Form (SOP)

S \ $D_0 D_1$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

$$Y = D_0\overline{S} + D_1 S$$



- Aus Tristate-Buffern
  - Benutze N Tristates für N-Eingangs-Mux
  - Schalte zu jeder Zeit genau einen Tristate-Buffer durch, Rest ist Z

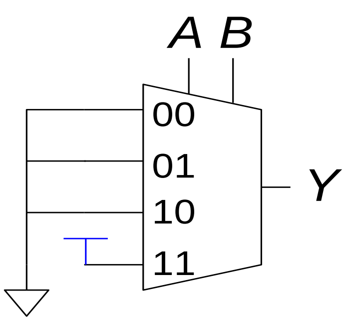


Logikfunktionen aufgebaut aus Multiplexern

- Verwende Mux als Wertetabelle (*look-up table)*

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Y = AB$$

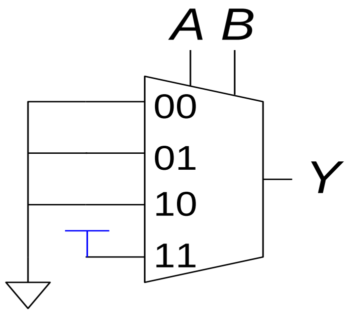


Logikfunktionen aufgebaut aus Multiplexern

Reduziere Größe des Multiplexers

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Y = AB$



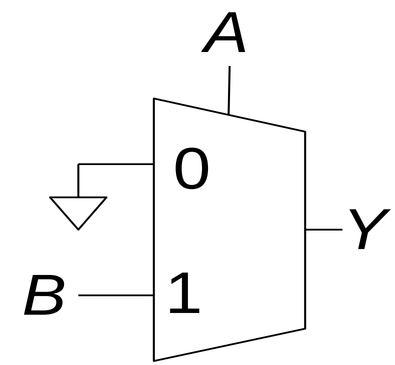
Logikfunktionen aufgebaut aus Multiplexern

Reduziere Größe des Multiplexers

$$Y = AB$$

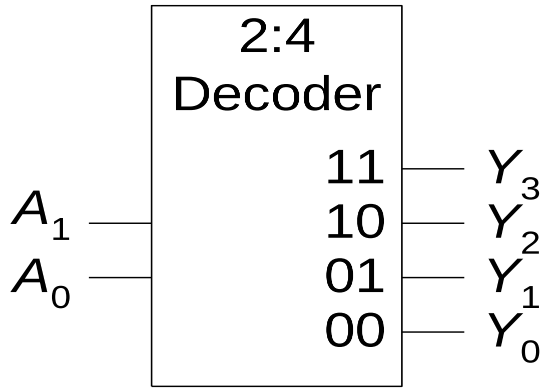
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	Y
0	0
1	B



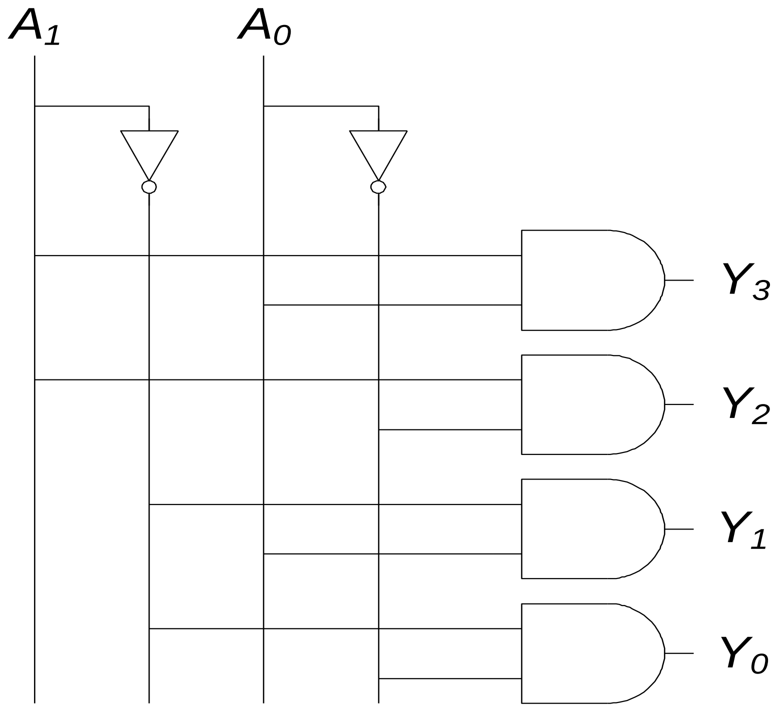
Dekodierer (*Decoder*)

- *N* Eingänge, 2^N Ausgänge
- Ausgänge sind “one-hot”: Zu jedem Zeitpunkt ist genau ein Ausgang 1



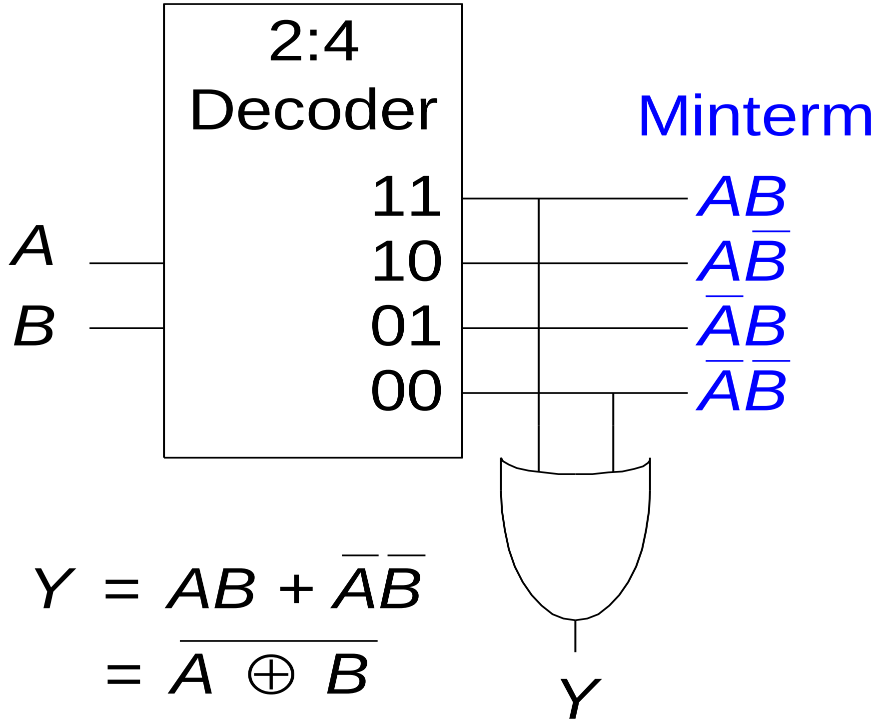
A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Implementierung von Dekodierern



Logik aufgebaut aus Dekodierern

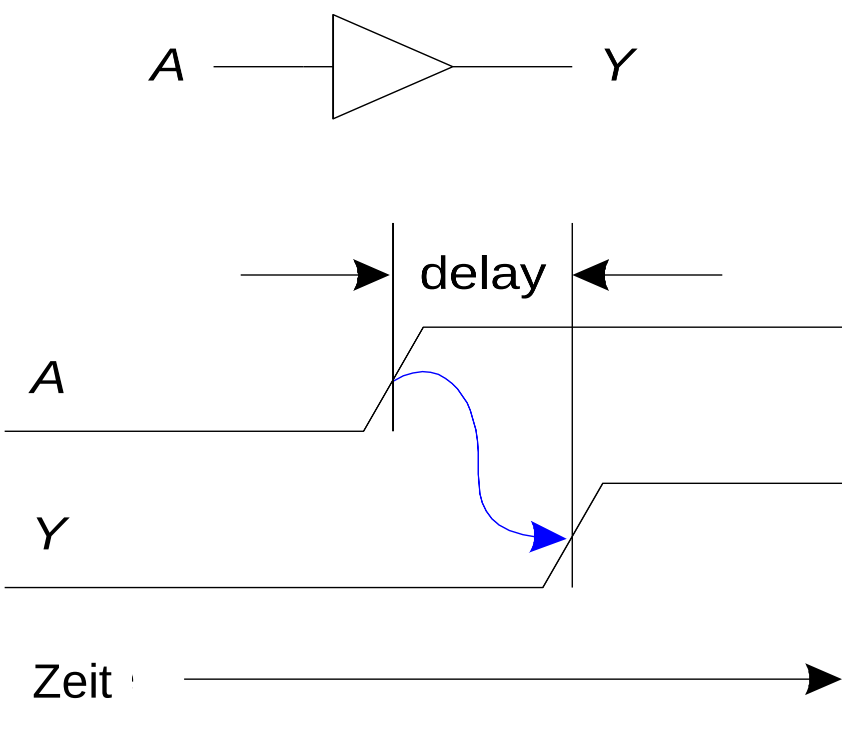
- Verknüpfe Minterme mit ODER



$$
\begin{aligned}
Y &= AB + \overline{A}\,\overline{B} \\
&= \overline{A \oplus B}
\end{aligned}
$$

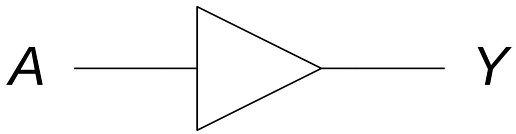
Zeitverhalten (*Timing*)

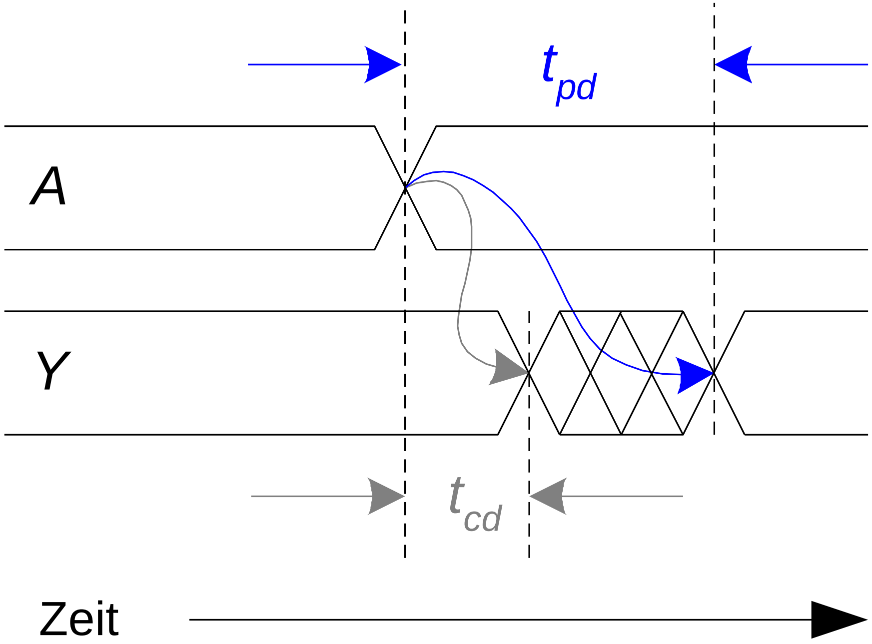
- Verzögerung (*delay*) zwischen Änderung am Eingang bis zur Änderung des Ausgangs
- Wie können schnelle Schaltungen aufgebaut werden?



Ausbreitungs- und Kontaminationsverzögerung (*propagation*) (*contamination delay*)

- **Ausbreitungsverzögerung:** t_{pd} = max. Zeit vom Eingang zum Ausgang
- **Kontaminationsverzögerung:** t_{cd} = min. Zeit vom Eingang zum Ausgang



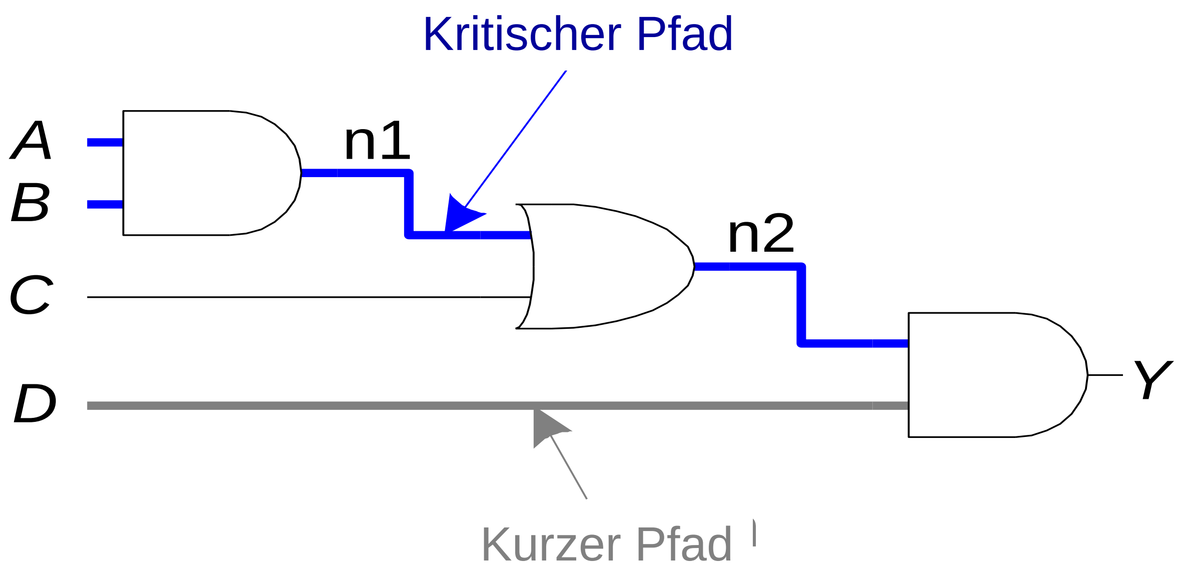


Ausbreitungs- und Kontaminationsverzögerung

- Ursachen für Verzögerung
  - Kapazitäten, Induktivitäten und Widerstände in der Schaltung
  - Lichtgeschwindigkeit als maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Warum können t_{pd} und t_{cd} unterschiedlich sein?
  - Unterschiedliche Verzögerungen für steigende und fallende Flanken
  - Mehrere Ein- und Ausgänge
    - Mit unterschiedlich langen Verzögerungen
  - Schaltungen werden
    - … langsamer bei Erwärmung
    - … schneller bei Abkühlung

Kritische (lange) und kurze Pfade



Kritischer (langer) Pfad: $t_{pd} = 2t_{pd\_AND} + t_{pd\_OR}$

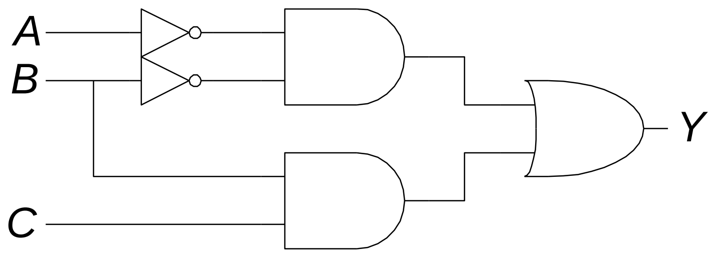
Kurzer Pfad: $t_{cd} = t_{cd\_AND}$

Störimpulse (*glitches*)

- **Störimpulse**
  - Eine Änderung eines Eingangs verursacht mehrere Änderungen des Ausgangs
- Können durch geeignete Entwurfsdisziplin entschärft werden
  - Können noch auftreten, richten aber keinen Schaden an
  - Synchroner Entwurf, kommt noch …
    - Kann Ausnahmen geben
- Sollten aber im Vorfeld erkannt werden
  - Sichtbar im Timing-Diagram

Beispiel für Störimpulse

- Was passiert, wenn A = 0, C = 1, und B fällt von 1→0?

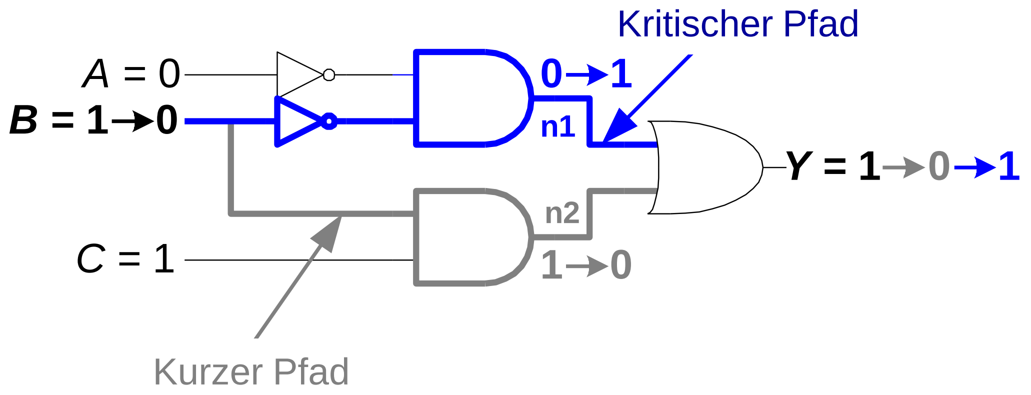


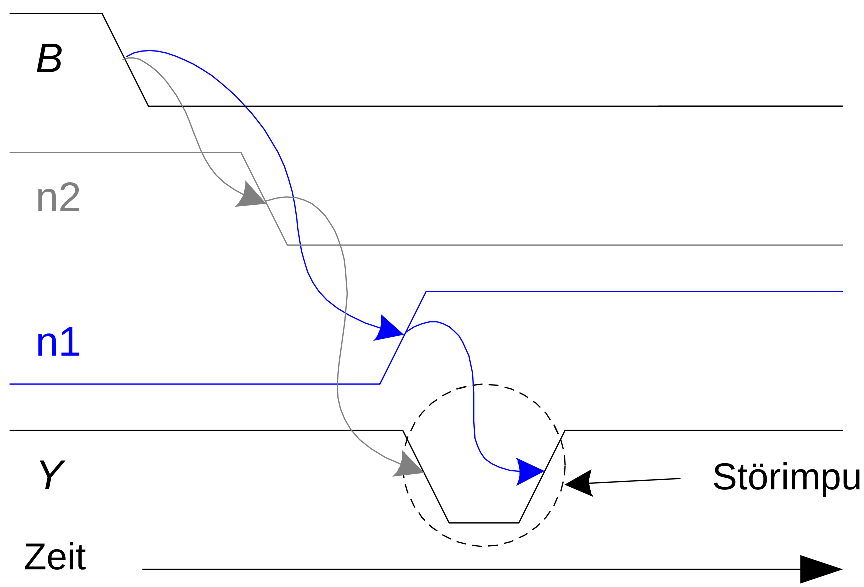
Y

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$$Y = \bar{A}\bar{B} + BC$$

Beispiel für Störimpulse (Fortsetzung)



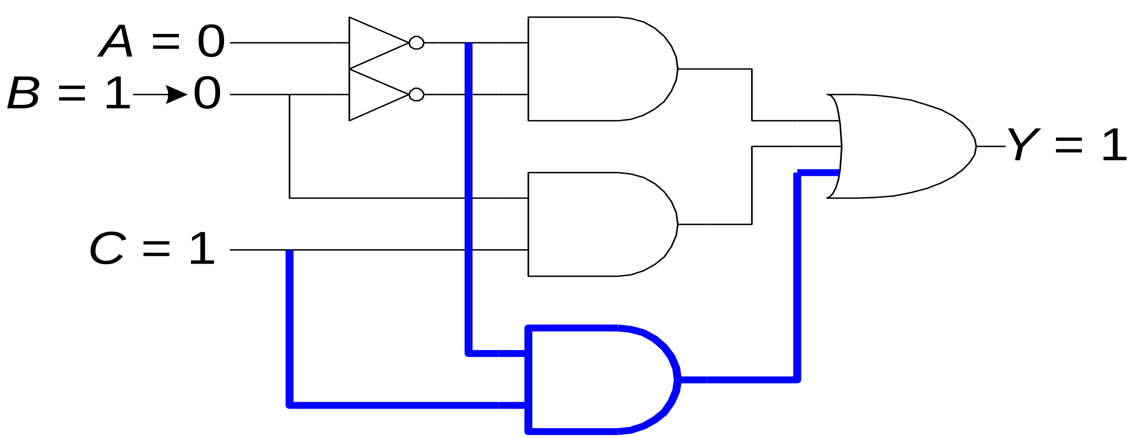


Störimpuls beseitigen

Y: C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$\bar{A}C$

$$Y = \bar{A}\bar{B} + BC + \bar{A}C$$



Warum Störimpulse beachten?

- Störimpulse verursachen keine Probleme bei synchronem Entwurf
  - In der Regel, auch da Fehlerquellen
  - ➔ Kapitel 3
- Sollten aber erkannt werden
  - Beim Debugging einer Schaltung im Simulator oder mit dem Oszilloskop
- Nicht alle Störimpulse können beseitigt werden
  - Z.b. bei gleichzeitigem Schalten mehrerer Eingänge

Zusätzliche Beispiele

Vereinfachen einer Formel

Ziel: eine Gleichung mit:

- die kleinste Anzahl von **Implikanten**
- jede Implikant hat die kleinste Anzahl von **Literalen**

Vereinfachen einer Formel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ziel: eine Gleichung mit:

- die kleinste Anzahl von **Implikanten**
- jede Implikant hat die kleinste Anzahl von **Literalen**

Wiederholung:

– Implikant: Produkte von Literalen

$A\overline{B}C, \overline{A}\,\overline{C}, BC$

– Literal: Variable oder ihr Komplement

$A, \overline{A}, B, \overline{B}, C, \overline{C}$

Embedded Systems & Applications

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** $B(C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Beweisung des Vereinfachungssatzes

$$PA + \overline{A} = P + \overline{A}$$

Beweisung Methode 1:

$$\begin{aligned}
PA + \overline{A} &= PA + (\mathbf{\overline{A} + \overline{A}P}) && \textbf{T9'} \\
&= PA + \mathbf{P\overline{A}} + \overline{A} && \textbf{T6} \\
&= \mathbf{P(A + \overline{A})} + \overline{A} && \textbf{T8} \\
&= P\mathbf{(1)} + \overline{A} && \textbf{T5'} \\
&= P + \overline{A} && \textbf{T1}
\end{aligned}$$

Beweisung des Vereinfachungssatzes

$$PA + \overline{A} = P + \overline{A}$$

Beweisung Methode 2:

$PA + \overline{A}$	$= (A + \overline{A})\,(P + \overline{A})$	**T8'**
	$= 1(\overline{A} + P)$	**T5'**
	$= \mathbf{\overline{A} + P}$	**T1**

Konsensusregel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Nr.	Theorem	Name
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) = (B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D)$	Konsensusregel

Beweisung:

$B \bullet C + \overline{B} \bullet D + C \bullet D$

$= BC + \overline{B}D + (CDB + CD\overline{B})$	**T10**
$= BC + \overline{B}D + BCD + \overline{B}CD$	**T6**
$= BC + BCD + \overline{B}D + \overline{B}CD$	**T6**
$= (BC + BCD) + (\overline{B}D + \overline{B}CD)$	**T7**
$= BC + \overline{B}D$	**T9'**

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** — $B\,(C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** — $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** — $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** — $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** — $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** — $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Vereinfachen bei Zusammenfassen

$Y = A\overline{B} + AB$

$Y = A$ T10

oder:

$= A(B + \overline{B})$ T8

$= A(1)$ T5'

$= A$ T1

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** $B\,(C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Vereinfachung von Gleichungen

$$Y = A(AB + ABC)$$

$= A(AB(1 + C))$	T8
$= A(AB(1))$	T2'
$= A(AB)$	T1
$= (AA)B$	T7
$= AB$	T3

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** $B(C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Vereinfachung von Gleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Y = A'BC + A' | **Recall: $A' = \overline{A}$**

= A' T9' Absorption: X + XY = X

oder

= A'(BC + 1) T8

= A'(1) T2'

= A' T1

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** $B (C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+ C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Vereinfachung von Gleichungen

Y = AB'C + ABC + A'BC

= AB'C + **ABC + ABC** + A'BC T3'

= (AB'C+ABC) + (ABC+A'BC) T7'

= AC + BC T10

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** $B\,(C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Vereinfachung von Gleichungen

$Y = AB + BC + B'D' + AC'D'$

Methode 1:

$Y = AB + BC + B'D' + (ABC'D' + AB'C'D')$	T10
$= (AB + ABC'D') + BC + (B'D' + AB'C'D')$	T6, T7
$= AB + BC + B'D'$	T9

Methode 2:

$Y = \mathbf{AB} + BC + \mathbf{B'D'} + AC'D' + \mathbf{AD'}$	T11
$= AB + BC + B'D' + AD'$	T9
$= AB + BC + B'D'$	T11

Methoden der Vereinfachung

- **Distributivität (T8, T8')** $B\,(C+D) = BC + BD$
  $B + CD = (B+C)(B+D)$
- **Absorption (T9')** $A + AP = A$
- **Zusammenfassen (T10)** $PA + P\overline{A} = P$
- **Erweitern** $P = PA + P\overline{A}$
  $A = A + AP$
- **Duplizieren** $A = A + A$
- **"Vereinfachung" Satz** $P\overline{A} + A = P + A$
  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Vereinfachung von Gleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Y = (A + BC)(A + DE)

T8' erst verwenden, wenn möglich: W+XZ = (W+X)(W+Z)

X = BC, Z = DE:

Y = (A+X)(A+Z)

= A + XZ   T8'

= A + BCDE

oder

Y = AA + ADE + ABC + BCDE   T8

= A + ADE + ABC + BCDE   T3

= **A + ADE** + ABC + BCDE

= **A** + ABC + BCDE   T9'

= A + BCDE   T9'

Vereinfachung von Gleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$Y = (A + C + D + E)(A + B)$

T8' erst verwenden, wenn möglich: $W+XZ = (W+X)(W+Z)$

$X = (C+D+E)$, $Z = B$

$Y = (A+X)(A+Z)$	
$= A + XZ$	T8'
$= A + (C+D+E)B$	
$= A + BC + BD + BE$	T8

oder

$Y = AA+AB+AC+BC+AD+BD+AE+BE$	T8
$= \mathbf{A}+AB+AC+AD+AE+BC+BD+BE$	T3
$= A + BC + BD + BE$	T9'