

Technische Grundlagen der Informatik – Kapitel 5



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr.-Ing. Andreas Koch
Fachgebiet Eingebettete Systeme und ihre Anwendungen (ESA)
Fachbereich Informatik

WS 11/12



Kapitel 5 : Themenübersicht



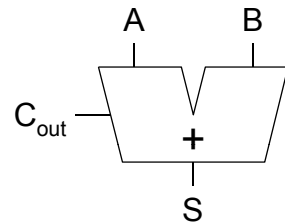
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Einleitung**
- **Arithmetische Schaltungen**
- **Zahlendarstellungen**
- **Sequentielle Grundelemente**
- **Speicherblöcke**
- **Programmierbare Logikfelder und -schaltungen**

- Grundelemente digitaler Schaltungen:
 - Gatter, Multiplexer, Decoder, Register, Arithmetische Schaltungen, Zähler, Speicher, programmierbare Logikfelder
- Grundelemente veranschaulichen
 - Hierarchie: Zusammensetzen aus einfacheren Elementen
 - Modularität: Wohldefinierte Schnittstellen und Funktionen
 - Regularität: Strukturen leicht auf verschiedene Größen anpassbar
- Grundelemente werden verwendet zum Aufbau eines eigenen Mikroprozessors
 - Kapitel 7

1-Bit Addierer

Halb- addierer

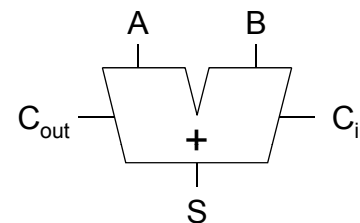


A	B	C_{out}	S
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

S =

C_{out} =

Voll- addierer



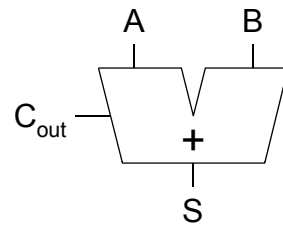
C_{in}	A	B	C_{out}	S
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

S =

C_{out} =

1-Bit Addierer

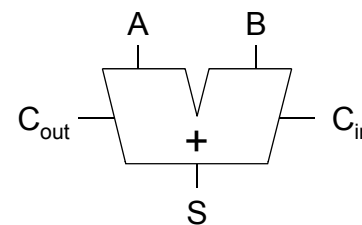
Halb- addierer



A	B	C_{out}	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = A \oplus B$$
$$C_{out} = A \cdot B$$

Voll- addierer

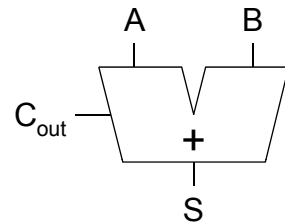


C_{in}	A	B	C_{out}	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$
$$C_{out} = (A \cdot B) \vee (A \oplus B) \cdot C_{in}$$

1-Bit Addierer

Halb- addierer

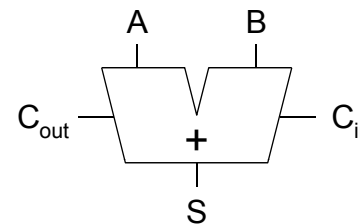


A	B	C _{out}	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = A \oplus B$$

$$C_{out} = AB$$

Voll- addierer



C _{in}	A	B	C _{out}	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

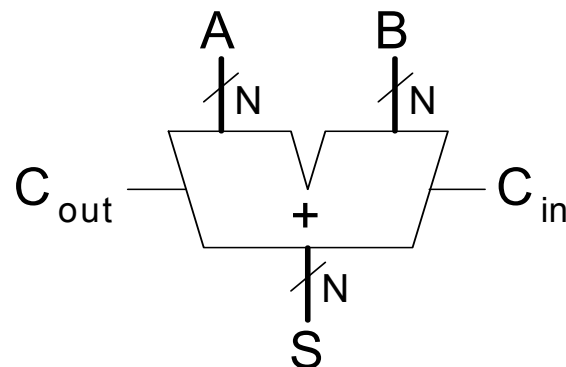
$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$

$$C_{out} = AB + AC_{in} + BC_{in}$$

Mehrbit-Addierer mit Weitergabe von Überträgen

- *Carry-propagate adder (CPA)*
- Verschiedene Typen
 - Ripple-carry-Addierer (langsam)
 - Carry-Lookahead Addierer (schnell)
 - Prefix-Addierer (noch schneller)
- Carry-Lookahead und Prefix-Addierer sind schneller bei breiteren Datenworten
 - Benötigen aber auch mehr Fläche

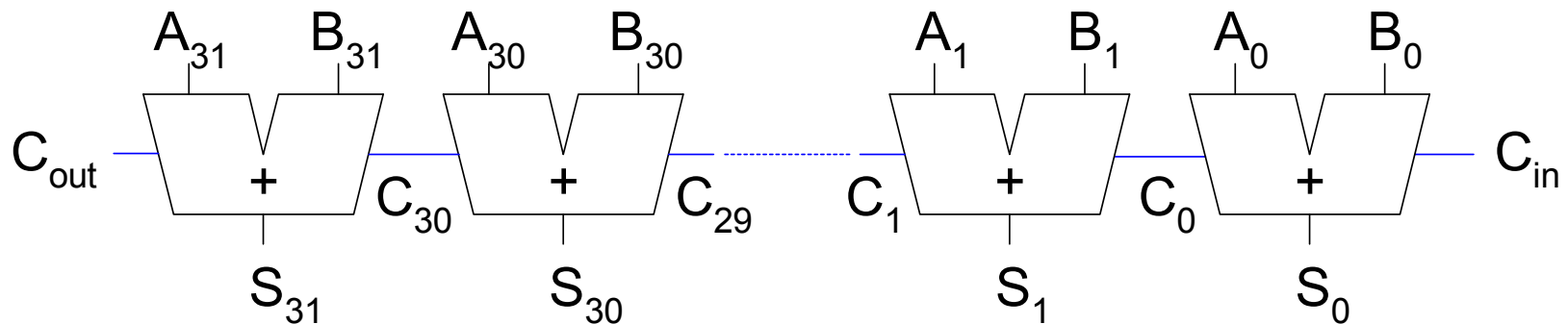
Schaltsymbol



Ripple-Carry-Addierer



- Kette von 1-bit Addierern
- Überträge werden von niedrigen zu hohen Bits weitergegeben
 - Rippeln sich durch die Schaltung
- Nachteil: **Langsam**



Verzögerung durch Ripple-Carry-Addierer



- Verzögerung durch einen N -bit Ripple-Carry-Addierer ist

$$t_{\text{ripple}} = N t_{FA}$$

t_{FA} ist die Verzögerung durch einen Volladdierer

Carry-Lookahead-Addierer (CLA)



- Überträge nicht mehr von Bit-zu-Bit
- Stattdessen: Berechne Übertrag C_{out} aus Block von k Bits
 - Nun zwei Signale
 - *Generate* (erzeuge neuen Übertrag)
 - *Propagate* (leite eventuellen Übertrag weiter)
- Bits werden in Spalten organisiert
 - Haben wir eben beim Ripple-Carry-Addierer auch schon gemacht
 - War aber nicht spannend: Es gab nur eine Zeile
 - ... ändert sich jetzt

Carry-Lookahead-Addierer: Definitionen



- Eine Spalte (Bit i) produziert einen Übertrag an ihrem Ausgang C_i
 - Wenn sie den Übertrag **selbst** erzeugt (*Generate*, G_i)
 - Wenn sie einen von C_{i-1} eingehenden Übertrag **weiterleitet** (*Propagate*, P_i)
- Eine Spalte i **erzeugt** einen Übertrag falls A_i und B_i beide 1 sind.

$$G_i = A_i B_i$$

- Eine Spalte leitet einen **eingehenden** Übertrag **weiter** falls A_i oder B_i 1 ist

$$P_i = A_i + B_i$$

- Damit ist der Übertrag C_i aus der Spalte i heraus

$$C_i = A_i B_i + (A_i + B_i) C_{i-1} = G_i + P_i C_{i-1}$$

Addition im Carry-Lookahead-Verfahren



- Schritt 1: Berechne G und P-Signale für **einzelne** Spalten (Einzelbits)
- Schritt 2: Berechne G und P Signale für **Gruppen von k Spalten** (k Bits)
- Schritt 3: Leite C_{in} nun nicht einzelbitweise, sondern in **k -Bit Sprüngen** weiter
 - Jeweils durch **einen** k -bit Propagate/Generate-Block



Beispiel: Carry-Lookahead Addierer

- Bestimme $P_{3:0}$ und $G_{3:0}$ Signale für einen 4b Block
- Überlegung: 4b Block erzeugt Übertrag wenn
 - ... Spalte 3 einen Übertrag **erzeugt** ($G_3=1$) oder
 - ... Spalte 3 einen Übertrag **weiterleitet** ($P_3=1$), der vorher erzeugt wurde

$$G_{3:0} = G_3 + P_3 (G_2 + P_2 (G_1 + P_1 G_0))$$

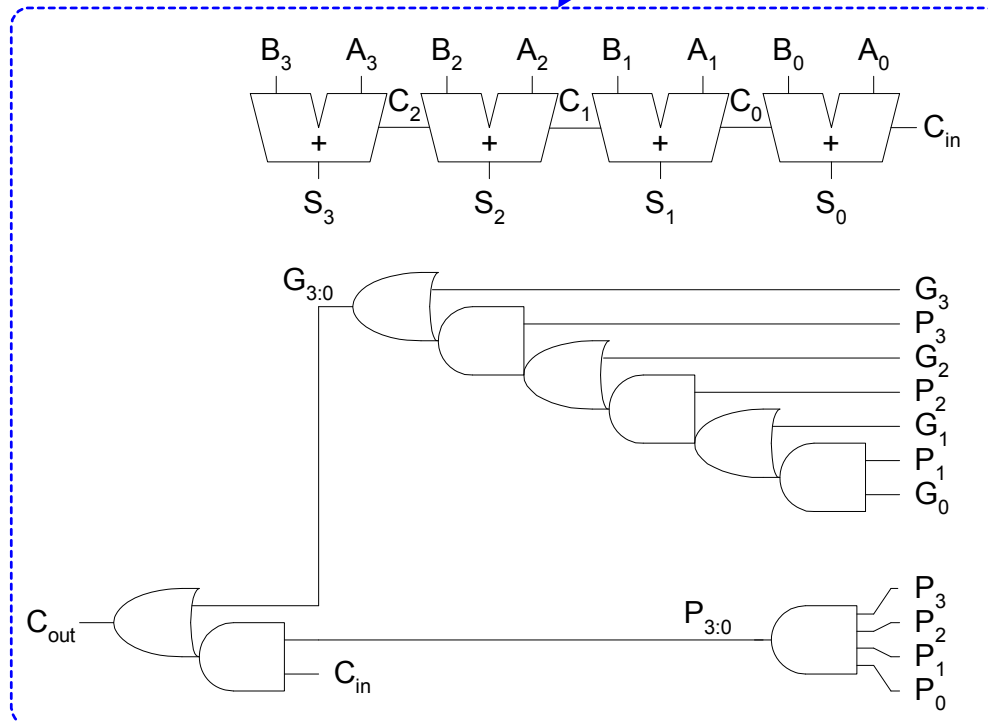
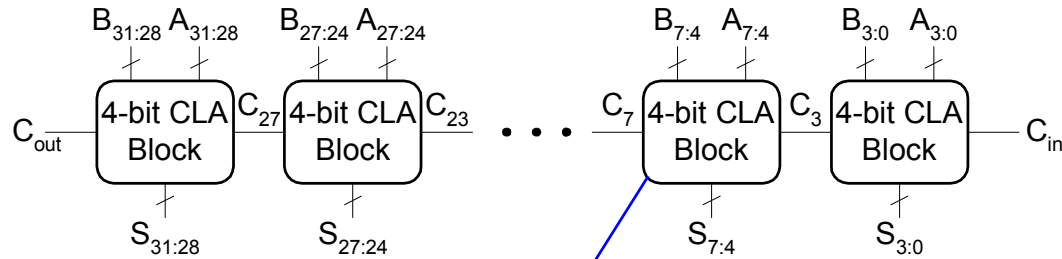
- Überlegung: Der 4b Block leitet einen Übertrag direkt weiter
 - ... wenn alle Spalten den Übertrag weiterleiten

$$P_{3:0} = P_3 P_2 P_1 P_0$$

- Damit ist der Übertrag durch einen $i:j$ Bit breiten Block C_i

$$C_i = G_{i:j} + P_{i:j} C_{j-1}$$

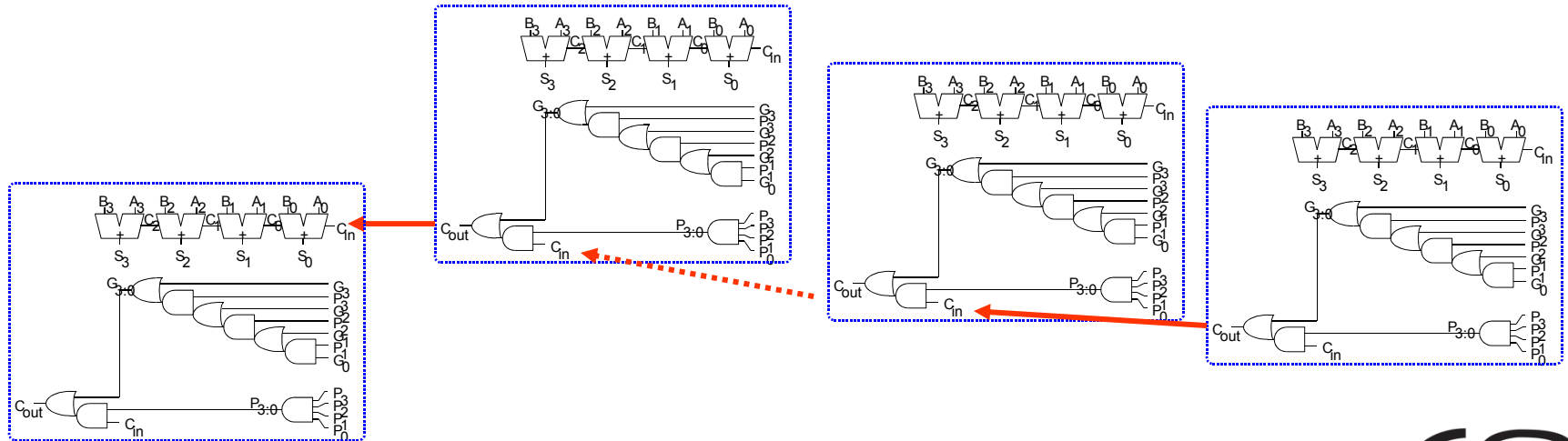
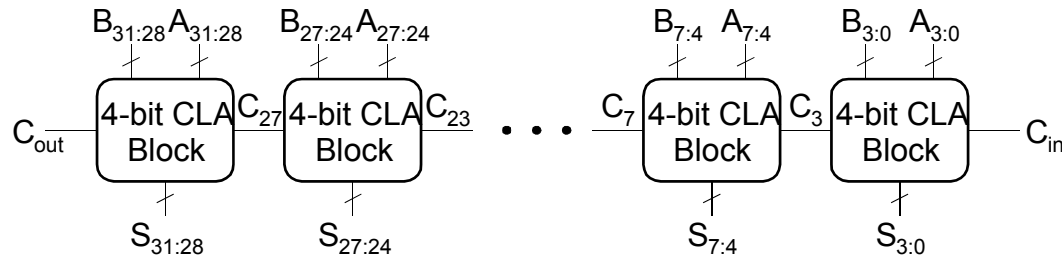
32-bit CLA mit 4b Blöcken



$$G_i = A_i B_i$$

$$P_i = A_i + B_i$$

32-bit CLA mit 4b Blöcken



Carry-Lookahead Addierer



- Verzögerung durch N -bit carry-lookahead Addierer mit k -Bit Blöcken

$$t_{CLA} = t_{pg} + t_{pg_block} + (N/k - 1) t_{AND_OR} + k t_{FA}$$

wobei

- t_{pg} : Verzögerung P, G Berechnung für eine Spalte (ganz rechts)
 - t_{pg_block} : Verzögerung P, G Berechnung für einen Block (rechts)
 - t_{AND_OR} : Verzögerung durch AND/OR je k -Bit CLA Block ("Weiche")
 - $k t_{FA}$: Verzögerung zur Berechnung der k höchstwertigen Summenbits
- Für $N > 16$ ist ein CLA oftmals schneller als ein Ripple-Carry-Addierer
 - Aber: Verzögerung hängt immer noch von N ab
 - Im wesentlichen linear

Präfix-Addierer



- Führt Ideen des **CLA** weiter
- Berechnet den Übertrag C_{i-1} in **jede** Spalte i so schnell wie möglich
- Bestimmt damit die **Summe** jeder Spalte

$$S_i = (A_i \oplus B_i) \oplus C_{i-1}$$

- Vorgehen zur schnellen Berechnung **aller** C_i
 - Berechne P und G für größer werdende Blöcke
 - 1b, 2b, 4b, 8b, ...
 - Bis die Eingangsüberträge für **alle** Spalten bereitstehen
- Nun nicht mehr N/k Stufen
- Sondern $\log_2 N$ Stufen
 - Breite der Operanden geht also nur noch **logarithmisch** in Verzögerung ein
- Allerdings: **Sehr** viel Hardware erforderlich!

- Ein Übertrag wird entweder
 - ... in einer Spalte i generiert
 - ... oder aus einer Vorgängerspalte $i-1$ propagiert
- Definition: Eingangsübertrag C_{in} in den **ganzen** Addierer kommt aus Spalte -1

$$G_{-1} = C_{in}, P_{-1} = 0$$

- Eingangsübertrag in eine Spalte i ist Ausgangsübertrag C_{i-1} der Spalte $i-1$

$$C_{i-1} = G_{i-1:-1}$$

$G_{i-1:-1}$ ist das Generate-Signal von Spalte -1 bis Spalte $i-1$

- **Interpretation:** Ein Ausgangsübertrag aus Spalte $i-1$ entsteht
 - ... wenn der Block $i-1:-1$ einen Übertrag generiert

- Damit Summenformel für Spalte i **umschreibbar** zu

$$S_i = (A_i \oplus B_i) \oplus G_{i-1:-1}$$

- Deshalb nun Ziel der **Hardware-Realisierung**:
 - Bestimme so **schnell** wie möglich $G_{0:-1}$, $G_{1:-1}$, $G_{2:-1}$, $G_{3:-1}$, $G_{4:-1}$, $G_{5:-1}$, ...
 - Sogenannte **Präfixe**

- Berechnung von P und G für **variabel** großen Block
 - **Höchstwertiges** Bit: i
 - **Niederwertiges** Bit: j
 - Unterteilt in zwei **Teilblöcke** ($i:k$) und ($k-1:j$)
- Für einen Block $i:j$

$$G_{i:j} = G_{i:k} + P_{i:k} G_{k-1:j}$$

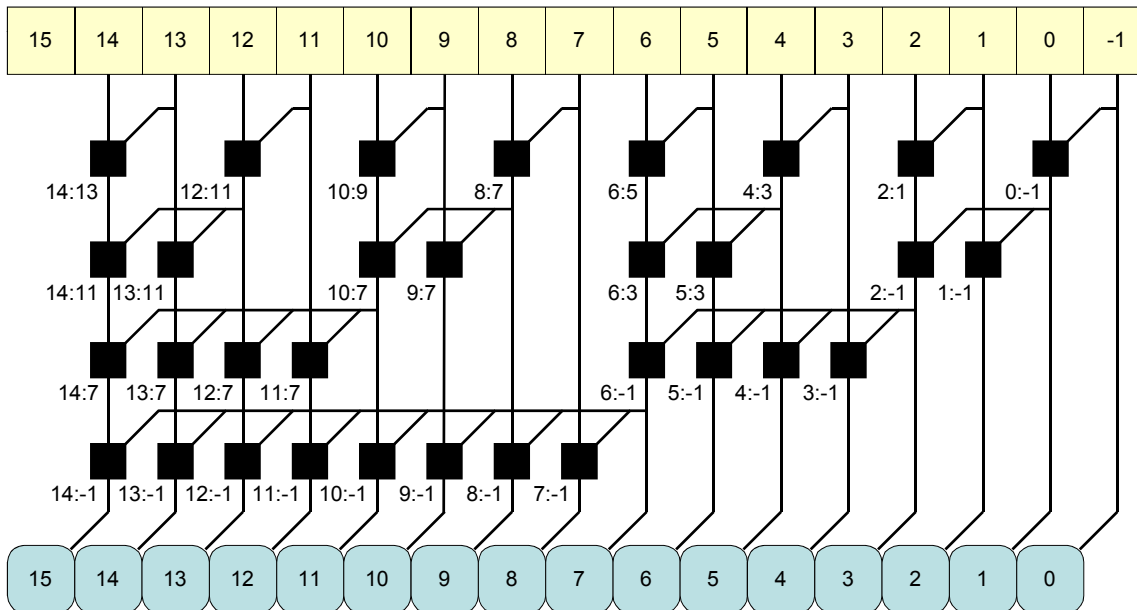
$$P_{i:j} = P_{i:k} P_{k-1:j}$$

- **Bedeutung**
 - Ein Block **erzeugt** einen Ausgabeübertrag, falls
 - ... in seinem **oberen** Teil ($i:k$) ein Übertrag **erzeugt** wird oder
 - ... der **obere** Teil einen Übertrag **weiterleitet**, der im **unteren** Teil ($k-1:j$) **erzeugt** wurde
 - Ein Block **leitet** einen Eingabeübertrag als Ausgabeübertrag weiter, falls
 - Sowohl der **untere** als auch der **obere** Teil den Übertrag weiterleiten

Aufbau eines Präfix-Addierers

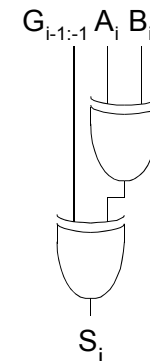
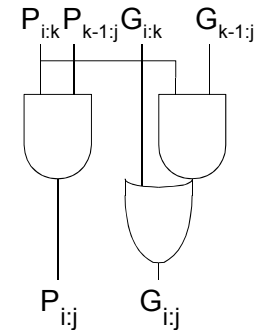
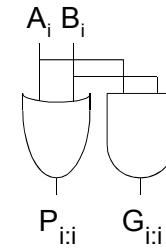
$$G_{i:j} = G_{i:k} + P_{i:k} G_{k-1:j}$$

$$P_{i:j} = P_{i:k} P_{k-1:j}$$



$$S_i = (A_i \oplus B_i) \oplus G_{i-1:-1}$$

Legende



Verzögerung durch Präfix-Addierer



- Verzögerung durch einen N -bit Präfix-Addierer

$$t_{PA} = t_{pg} + (\log_2 N) t_{pg_prefix} + t_{XOR}$$

wobei

- t_{pg} : Verzögerung durch P, G-Berechnung für Spalte i (ein AND bzw. OR-Gatter)
- t_{pg_prefix} : Verzögerung durch eine Präfix-Stufe (AND-OR Gatter)
- t_{XOR} : Verzögerung durch letztes XOR der Summenberechnung



Vergleich von Addiererverzögerungen

- Szenario: 32b Addition mit Ripple-Carry, Carry-Lookahead (4-bit Blöcke), Präfix-Addierer
- Verzögerungen von Komponenten
 - Volladdierer $t_{FA} = 300\text{ps}$
 - Zwei-Eingangs Gatter $t_{AND} = t_{OR} = t_{XOR} = 100\text{ps}$

$$t_{\text{ripple}} = N t_{FA}$$

=

$$t_{CLA} = t_{pg} + t_{pg_block} + (N/k - 1) t_{AND_OR} + k t_{FA}$$

=

=

$$t_{PA} = t_{pg} + (\log_2 N) t_{pg_prefix} + t_{XOR}$$

=

=



Vergleich von Addiererverzögerungen

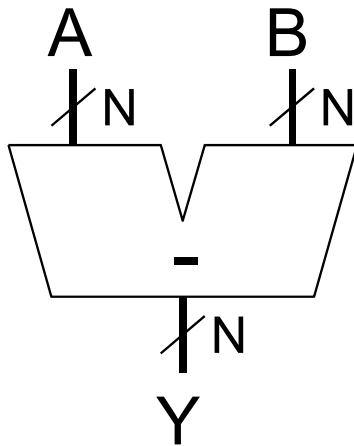
- Szenario: 32b Addition mit, Ripple-Carry, Carry-Lookahead (4-bit Blöcke), Präfix-Addierer
- Verzögerungen von Komponenten
 - Volladdierer $t_{FA} = 300\text{ps}$
 - Zwei-Eingangs Gatter $t_{AND} = t_{OR} = t_{XOR} = 100\text{ps}$

$$\begin{aligned}t_{\text{ripple}} &= N t_{FA} = 32 (300 \text{ ps}) \\ &= 9,6 \text{ ns}\end{aligned}$$

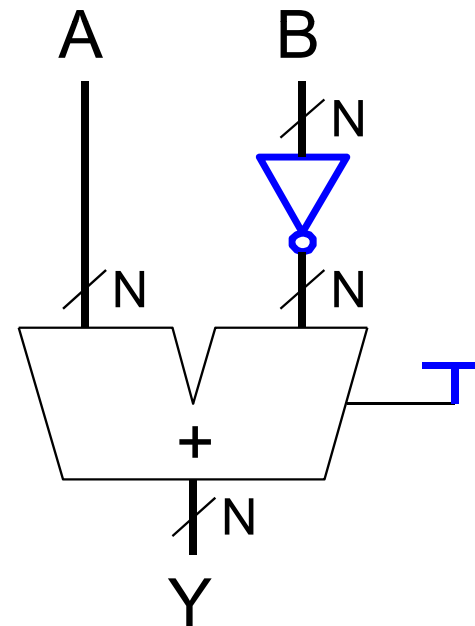
$$\begin{aligned}t_{CLA} &= t_{pg} + t_{pg_block} + (N/k - 1) t_{AND_OR} + k t_{FA} \\ &= [100 + 600 + (7) 200 + 4 (300)] \text{ ps} \\ &= 3,3 \text{ ns}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_{PA} &= t_{pg} + (\log_2 N) t_{pg_prefix} + t_{XOR} \\ &= [100 + (\log_2 32) 200 + 100] \text{ ps} \\ &= 1,2 \text{ ns}\end{aligned}$$

Symbol

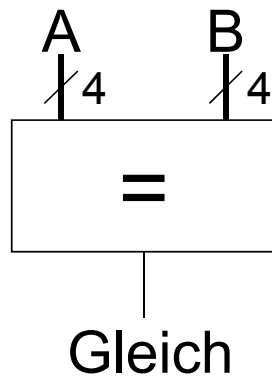


Implementierung

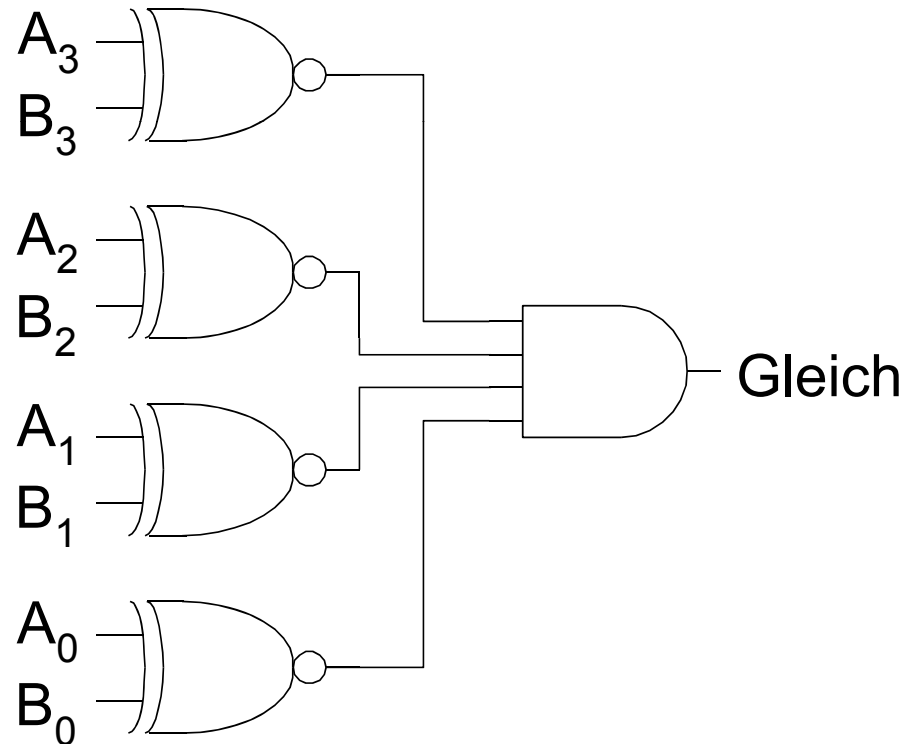


Vergleicher: Gleichheit

Symbol

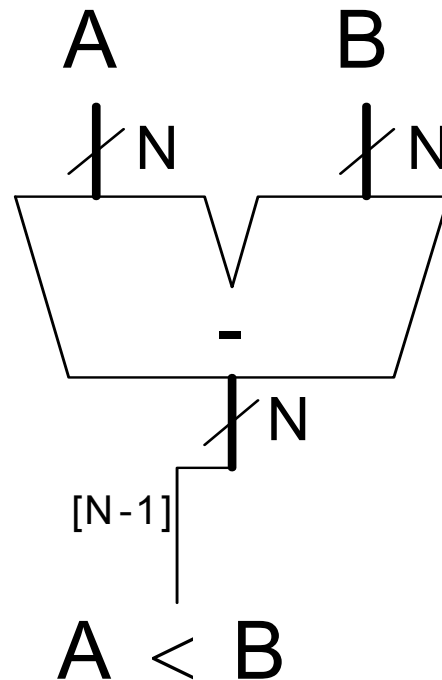


Implementierung

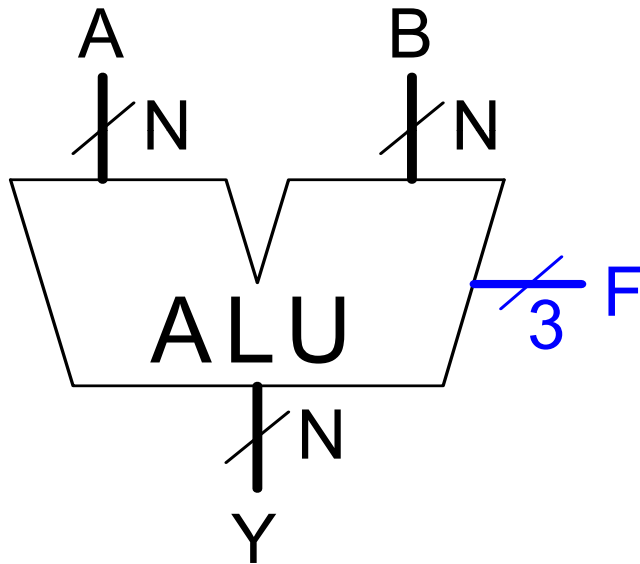


Vergleicher: Kleiner-Als

- Für vorzeichenlose Zahlen

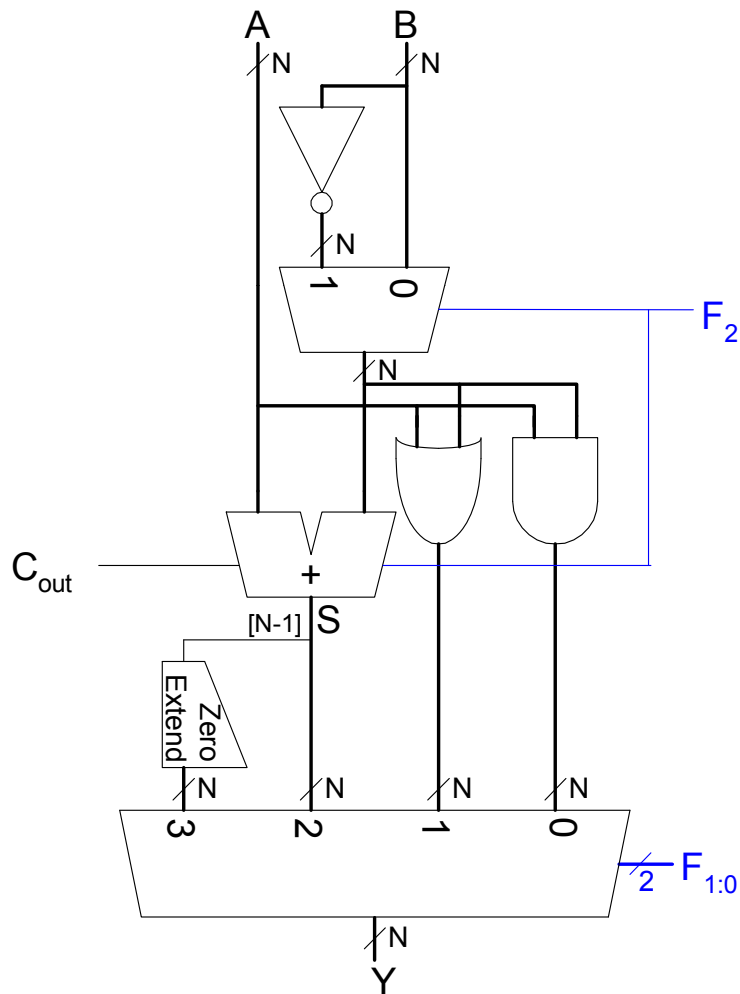


Arithmetisch-logische Einheit (*arithmetic logic unit, ALU*)



$F_{2:0}$	Funktion
000	A & B
001	A B
010	A + B
011	Nicht verwendet
100	A & ~B
101	A ~B
110	A - B
111	SLT

Beispiel: Set Less Than (SLT)



- Konfiguriere 32b ALU für SLT-Berechnung
 - Annahme: $A = 25$, $B = 32$

Schiebeoperationen (*shifter*)

- **Logisches Schieben:** Wert wird eine Bitposition verschoben, leere Stellen mit 0 aufgefüllt
 - Beispiel: 11001 >> 2 =
 - Beispiel: 11001 << 2 =

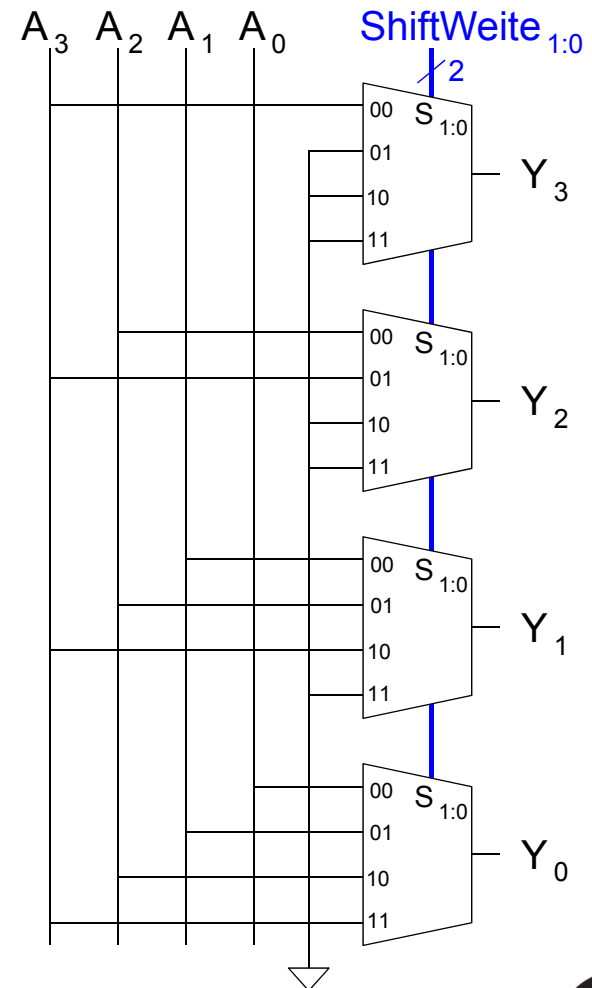
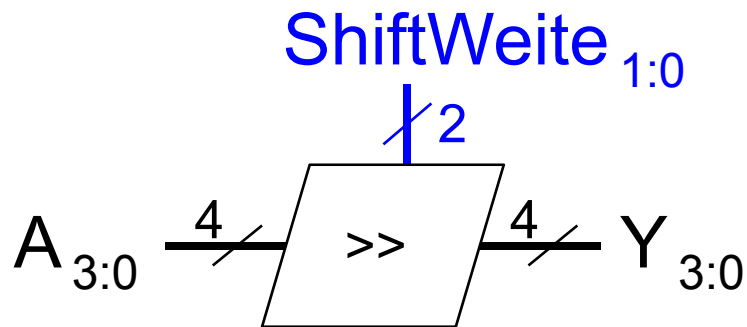
- **Arithmetisches Schieben:** wie logisches Schieben. Verwende aber beim Rechtsschieben alten Wert des msb zum Auffüllen leerer Stellen
 - Beispiel: 11001 >>> 2 =
 - Beispiel: 11001 <<< 2 =

- **Rotierer:** rotiert Bits im Kreis, herausgeschobene Bits tauchen am anderen Ende wieder auf
 - Beispiel : 11001 ROR 2 =
 - Beispiel : 11001 ROL 2 =

Schiebeoperationen (*shifter*)

- **Logisches Schieben:** Wert wird eine Bitposition verschoben, leere Stellen mit 0 aufgefüllt
 - Beispiel: $11001 \gg 2 = 00110$
 - Beispiel: $11001 \ll 2 = 00100$
- **Arithmetisches Schieben:** wie logisches Schieben. Verwende aber beim Rechtsschieben alten Wert des msb zum Auffüllen leerer Stellen
 - Beispiel: $11001 \ggg 2 = 11110$
 - Beispiel: $11001 \lll 2 = 00100$
- **Rotierer:** rotiert Bits im Kreis, herausgeschobene Bits tauchen am anderen Ende wieder auf
 - Beispiel : $11001 \text{ ROR } 2 = 01110$
 - Beispiel : $11001 \text{ ROL } 2 = 00111$

Aufbau von Shiftern



Shifter als Multiplizierer und Dividierer



- Logisches Schieben um N Stellen nach links multipliziert den Zahlenwert mit 2^N
 - Beispiel : $00001 \ll 2 = 00100$ ($1 \times 2^2 = 4$)
 - Beispiel : $11101 \ll 2 = 10100$ ($-3 \times 2^2 = -12$)
- Arithmetisches Schieben um N Stellen nach rechts dividiert den Zahlenwert durch 2^N
 - Beispiel : $01000 \ggg 2 = 00010$ ($8 \div 2^2 = 2$)
 - Beispiel : $10000 \ggg 2 = 11100$ ($-16 \div 2^2 = -4$)

Multiplizierer

- Schrittweise Multiplikation in Dezimal- und Binärdarstellung:
 - Multiplizieren des Multiplikanden mit einzelner Stelle des Multiplikators
 - Berechnet ein Teilprodukt (auch partielles Produkt genannt)
 - Entsprechend der Wertigkeit der aktuellen Multiplikatorstelle nach links verschobene partielle Produkte werden aufaddiert

Dezimal

$$\begin{array}{r} 230 \\ \times 42 \\ \hline 460 \\ + 920 \\ \hline 9660 \end{array}$$

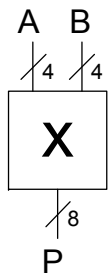
$$230 \times 42 = 9660$$

Binär

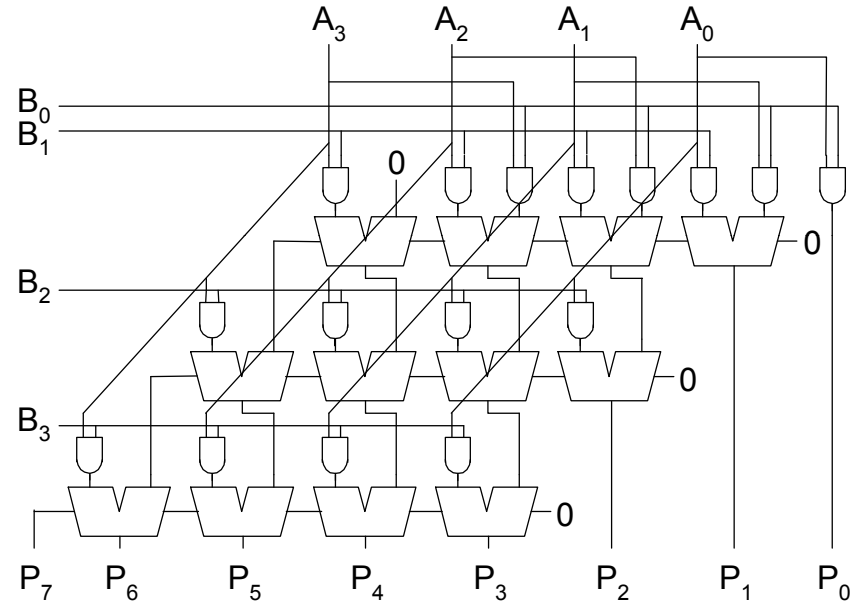
Multiplikand	0101
Multiplikator	x 0111
	<hr/>
partielle	0101
Produkte	0101
	0101
	+ 0000
	<hr/>
Ergebnis	0100011

$$5 \times 7 = 35$$

4 x 4 Multiplizierer



$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
 \times & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\
 \hline
 & A_3B_0 & A_2B_0 & A_1B_0 & A_0B_0 \\
 A_3B_1 & A_2B_1 & A_1B_1 & A_0B_1 & \\
 A_3B_2 & A_2B_2 & A_1B_2 & A_0B_2 & \\
 + & A_3B_3 & A_2B_3 & A_1B_3 & A_0B_3 \\
 \hline
 P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0
 \end{array}
 \end{array}$$



Multiplikation von k -bit Zahlen hat $2k$ -bit breites Produkt

- Leidlich einfach, dann aber sehr langsam
- Sehr kompliziert, dann wenigstens etwas schneller
 - Aber immer noch deutlich langsamer als z.B. Multiplikation
- Für Einführungsveranstaltung eher ungeeignet
 - Beschreibung im Buch auch ziemlich schlecht ...
- Hier nur aus dem Orbit gestreift
 - Auszug aus

Behrooz Parhami

Computer Arithmetic: Algorithms and Hardware Designs

Oxford U. Press, 2nd ed., 2010, ISBN 978-0-19-532848-6

Notation für Erklärung der Division



z	Dividend	$z_{2k-1}z_{2k-2} \dots z_3z_2z_1z_0$
d	Divisor	$d_{k-1}d_{k-2} \dots d_1d_0$
q	Quotient	$q_{k-1}q_{k-2} \dots q_1q_0$
s	Rest, $z - (d q)$	$s_{k-1}s_{k-2} \dots s_1s_0$

- Dividiere **vorzeichenlose** Zahlen

durch **Dividend** z (2k Bit breit)
Divisor d (k Bit breit)

- Ergebnis

Quotient q (k Bit breit)
Rest s (k Bit breit)

- Es gilt

$$z = q d + s$$

Auftreten von Überläufen



- Beispiel $k=8$:
- Problem: Damit nicht alle Ergebniswerte repräsentierbar
 - Operanden: $z =$, $d =$
 - Ergebnis: $q =$
 $s =$

Auftreten von Überläufen



- Beispiel $k=8$: 16b Dividend, 8b Divisor, 8b Quotient, 8b Rest
- Problem: Damit nicht alle Ergebniswerte repräsentierbar
 - Operanden: $z = 65534$, $d = 2$
 - Ergebnis: $q = 32767$ **nicht mehr in 8b darstellbar, Überlauf!**
 $s = 0$
- Vorgehensweise: **Vorher auf darstellbares Ergebnis prüfen**
 - Vermeidet Überlauf
 - Fängt auch Division durch Null ab

Abfangen von Überläufen



- Maximalwert für Dividenden

$$z = q d + s$$

- Maximalwert für q (k Bit breit):
- Maximalwert für s (k Bit breit):

- $Z_{\max} =$

Abfangen von Überläufen

- Maximalwert für Dividenden

$$z = q d + s$$

- Maximalwert für q (k Bit breit): $2^k - 1$
- Maximalwert für s (k Bit breit): $d - 1$

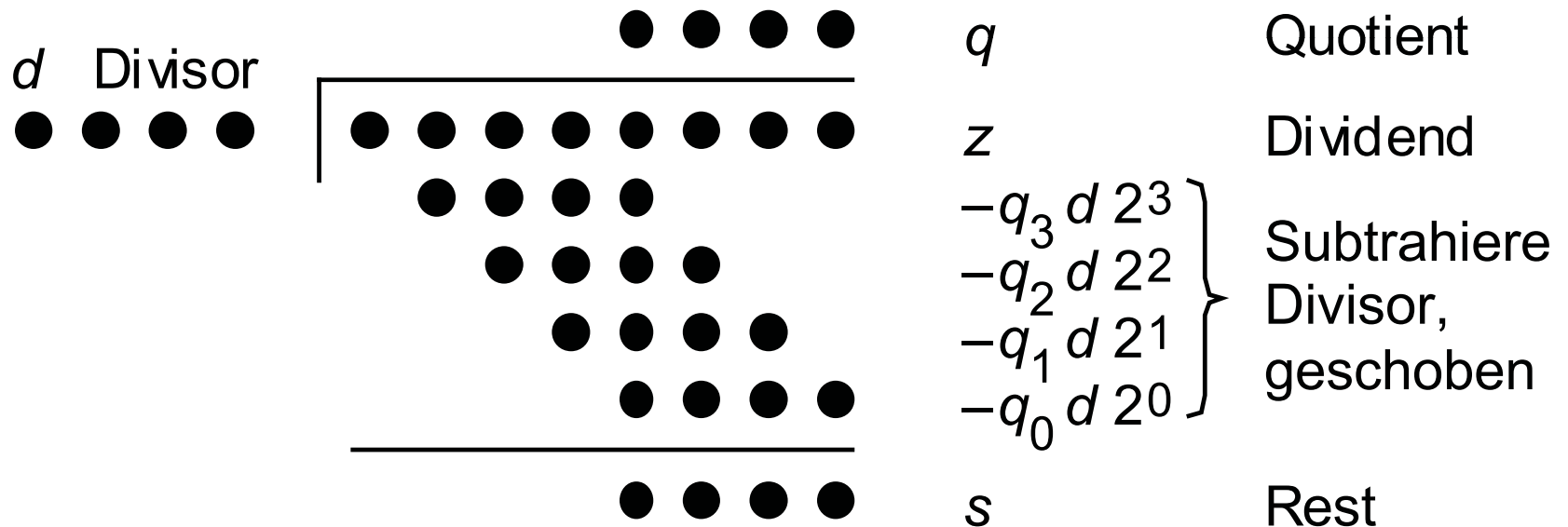
- $z_{\max} = (2^k - 1) d + d - 1 = 2^k d - 1$

- $z < z_{\max} + 1 \quad \rightarrow \quad$ Wenn $z < 2^k d$, dann **kein** Überlauf



Generelle Vorgehensweise für Division

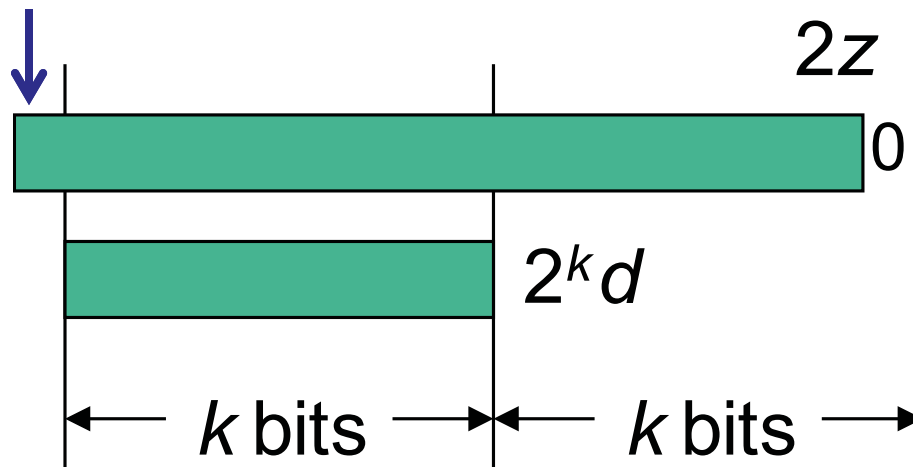
- Hier: Einfaches, aber langsames Verfahren



Optimierung

- Schiebe nicht Divisor nach rechts
- ... sondern partiellen Rest nach links

msb gesondert behandeln!



Schrittweise nach links
geschoben

Bleibt gleich

Algorithmus für 2 k Bit Dividend / k Bit Divisor



- **Schritt 0:** Initialisiere partiellen Rest mit Dividend

$$s^{(0)} = z$$

- **Schritt j :** Schiebe partiellen Rest ein Bit nach links und subtrahiere versuchsweise um k Bit verschobenen Divisor.
Falls Differenz ≥ 0 : $q_{k-j} = 1$, sonst $= 0$

$$s^{(j)} = 2 s^{(j-1)} - q_{k-j} (2^k d)$$

- **Schritt k :** Ende

$$s^{(k)} = 2^k s^{(0)} - q (2^k d) = 2^k (z - q d) = 2^k s$$

Beispiel: 117 / 10



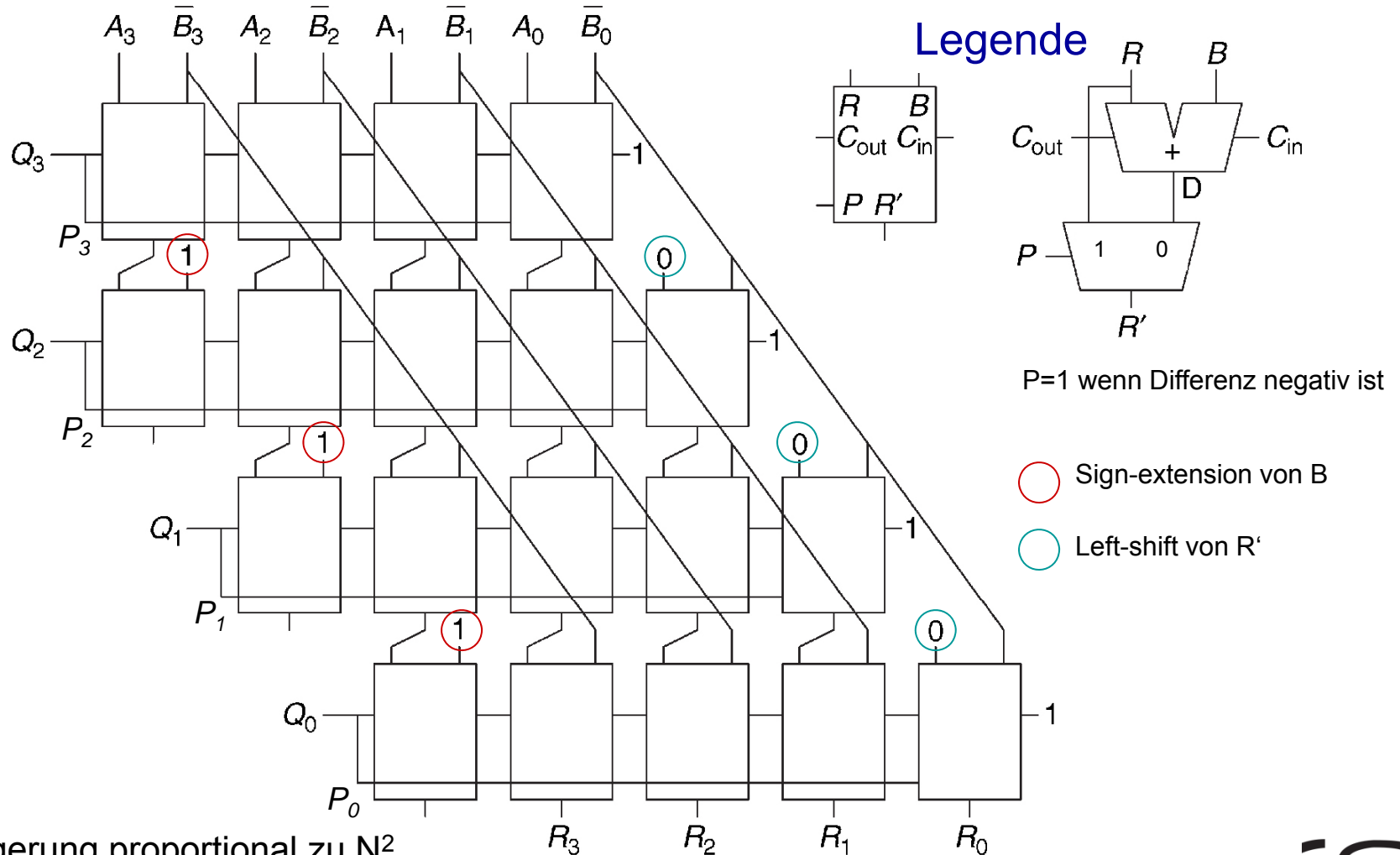
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel 8b Dividend, 4b Divisor: 117 / 10



	z	0 1 1 1 0 1 0 1	
	2^4d	1 0 1 0	
		=====	
Schritt 0	$s^{(0)}$	0 1 1 1 0 1 0 1	
	$2s^{(0)}$	0 1 1 1 0 1 0 1	
Schritt 1	$-q_3 2^4d$	1 0 1 0 $\{q_3 = 1\}$	
	$s^{(1)}$	0 1 0 0 1 0 1	
	$2s^{(1)}$	0 1 0 0 1 0 1	
Schritt 2	$-q_2 2^4d$	0 0 0 0 $\{q_2 = 0\}$	
	$s^{(2)}$	1 0 0 1 0 1	
	$2s^{(2)}$	1 0 0 1 0 1	
Schritt 3	$-q_1 2^4d$	1 0 1 0 $\{q_1 = 1\}$	
	$s^{(3)}$	1 0 0 0 1	
	$2s^{(3)}$	1 0 0 0 1	
Schritt 4	$-q_0 2^4d$	1 0 1 0 $\{q_0 = 1\}$	
	$s^{(4)}$	0 1 1 1	
	s	0 1 1 1	
	q	1 0 1 1	
		=====	

Kombinatorischer 4 x 4 Array-Dividierer: A / B



Verzögerung proportional zu N^2



- Bisher kennengelernt
 - Positive Zahlen
 - Vorzeichenlose Binärdarstellung
 - Negative Zahlen
 - Zweierkomplement
 - Darstellung als Vorzeichen/Betrag

- Wo bleiben Brüche?
 - Rationale Zahlen?

- Reelle Zahlen?

Zahlen mit Bruchanteilen

- Zwei gängige Darstellungen:

- *Festkomma (fixed-point)*:

Position des Kommas bleibt konstant

Beispiel: Dezimalsystem, 2 Vorkomma-, 3 Nachkommastellen

2,000 99,999 0,000 -2,718

nicht: 3,1415 365,250

- *Gleitkomma (floating-point)*

Position des Kommas kann wandern, ist stets **rechts der höchstwertigen** Stelle \leftrightarrow 0. Angabe der Position des Kommas in Exponentenschreibweise

Beispiel: Dezimalsystem, insgesamt 5 Stellen

$2 \cdot 10^0$ $9,9999 \cdot 10^1$ $0 \cdot 10^0$ $-2,718 \cdot 10^0$ $3,1415 \cdot 10^0$ $3,6525 \cdot 10^2$ $5 \cdot 10^6$

nicht: $3,14159 \cdot 10^0$

Auch: Obergrenze für Exponenten, keine beliebig großen Zahlen darstellbar



- Darstellung von 6,75 mit 4b für ganzen Anteil und 4b für Binärbruch:

01101100

0110 , 1100

$$2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} = 6,75$$

- Binärkomma wird nicht explizit dargestellt
 - Position wird durch Format impliziert (hier: 4,4)
- Alle Leser und Schreiber von Festkommatdaten müssen dasselbe Format verwenden

Binäre Festkommazahlen

- Beispiel: Stelle $7,5_{10}$ in 8b im binären 4,4-Festkommaformat dar

Binäre Festkommazahlen

- Beispiel: Stelle 7.5_{10} in 8b im 4,4-Festkommaformat dar

01111000

Vorzeichenbehaftete Festkommazahlen



- Wie bei ganzen Zahlen: Zwei Darstellungen möglich
 - Vorzeichen/Betrag
 - Zweierkomplement

- Stelle -7.5_{10} in 8b als 4,4-Festkommazahl dar
 - Vorzeichen/Betrag:

 - Zweierkomplement:

Vorzeichenbehaftete Festkommazahlen



- Wie bei ganzen Zahlen: Zwei Darstellungen möglich
 - Vorzeichen/Betrag
 - Zweierkomplement

- Stelle -7.5_{10} in 8b als 4,4-Festkommazahl dar

- Vorzeichen/Betrag:

11111000

- Zweierkomplement:

Vorzeichenbehaftete Festkommazahlen



- Wie bei ganzen Zahlen: Zwei Darstellungen möglich
 - Vorzeichen/Betrag
 - Zweierkomplement
- Stelle -7.5_{10} in 8b als 4,4-Festkommazahl dar

- Vorzeichen/Betrag:

11111000

- Zweierkomplement:

1. +7.5: 01111000

2. Invertieren: 10000111

3. Addiere 1 zu lsb: + 1

10001000

Binäre Gleitkommazahlen



- Binärkomma liegt immer genau rechts von höchstwertiger 1
- Ähnlich zur wissenschaftlichen Darstellung von Dezimalbrüchen
- Beispiel: 4.387.263 in wissenschaftlicher Darstellung

$$4,387263 \times 10^6$$

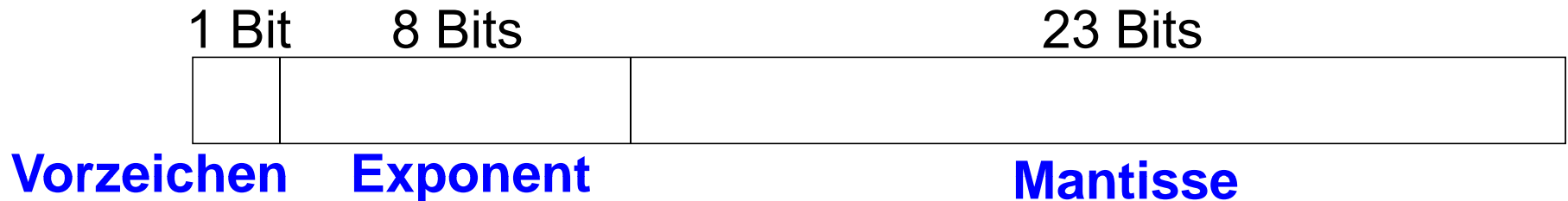
- Allgemeine Schreibweise:

$$\pm M \times B^E$$

wobei

- **M** = Mantisse
- **B** = Basis
- **E** = Exponent
- Im Beispiel: $M = 4,387263$, $B = 10$, and $E = 6$

Binäre Gleitkommazahlen

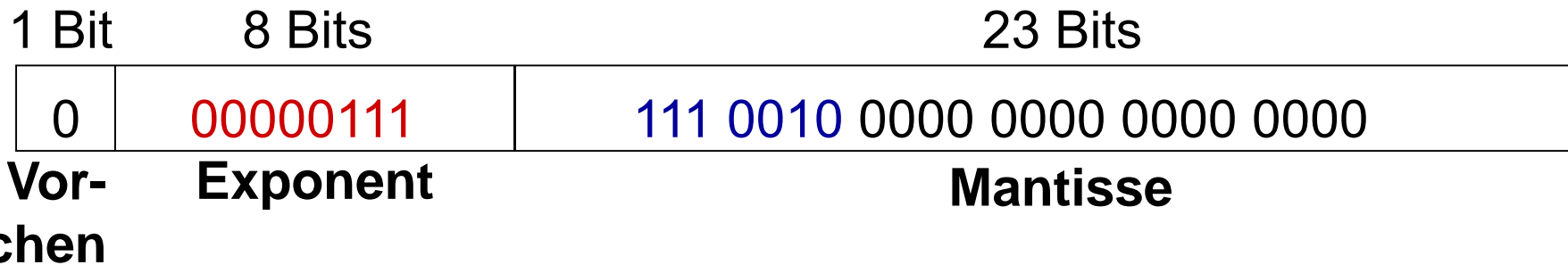


- **Beispiel:** Stelle den Wert 228_{10} als 32b-Gleitkommazahl dar
- Im folgenden drei Versionen, nur die letzte davon ist eine Standarddarstellung!
 - IEEE 754, *single precision format*

Binäre Gleitkommadarstellung: 1. Versuch

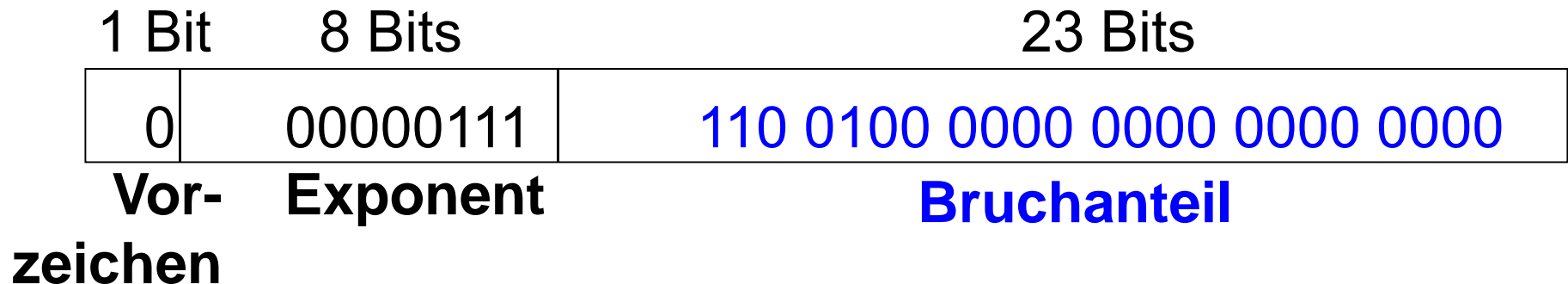


- Wandele Dezimalzahl in Binärdarstellung um:
 - $228_{10} = 11100100_2 = 1,11001 \times 2^7$
- Trage nun Daten in die Felder des 32b Wortes ein:
 - Vorzeichenbit ist positiv (0)
 - Die 8b des Exponenten stellen den Wert 7 dar
 - Die verbliebenen 23 Bit stellen die Mantisse dar



Binäre Gleitkommadarstellung: 2. Versuch

- Beobachtung: Das erste Bit der Mantisse ist so immer 1
 - $228_{10} = 11100100_2 = 1,11001 \times 2^7$
- Man kann sich das explizite Abspeichern der führenden 1 sparen
 - Die führende 1 wird implizit immer als präsent angenommen
- Stattdessen: Speichere nur den Bruchanteil (die “Nachkommastellen”) explizit ab



Binäre Gleitkommadarstellung: 3. Versuch

- Exponent kann auch negativ sein
 - Idee: Zweierkomplement. Wäre möglich, hat aber praktische Nachteile
 - Besser: Exponent relativ zu konstantem Grundwert (Exzess, Biaswert) angeben
- Hier: Biaswert = 127 (01111111_2)
 - Exponent mit Bias = Biaswert + Exponent
 - Exponent 7 wird also gespeichert als:

$$127 + 7 = 134 = 0x10000110_2$$

- Damit **IEEE 754 32-bit Gleitkommadarstellung** von 228_{10}

1 Bit

8 Bits

23 Bits

0	10000110	110 0100 0000 0000 0000 0000
---	----------	------------------------------

Vorz.

**Exponent
mit Bias**

Bruchanteil

Beispiel IEEE 754 Gleitkommadarstellung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Stelle -58.25_{10} gemäß dem IEEE 754 32-bit Gleitkommastandard dar

Beispiel IEEE 754 Gleitkommadarstellung



- Stelle -58.25_{10} gemäß dem IEEE 754 32-bit Gleitkommastandard dar
- 1. Wandle in Binärdarstellung um:
 - $58,25_{10} =$
- 2. Trage Felder des 32b Gleitkommawortes ein:
 - Vorzeichen:
 - 8 Bits für Exponent:
 - 23 Bits für Bruchanteil:

1 Bit

8 Bits

23 Bits



Vorz.

Exponent

Bruchanteil

- In Hexadezimalschreibweise:

Beispiel IEEE 754 Gleitkommadarstellung

- Stelle -58.25_{10} gemäß dem IEEE 754 32-bit Gleitkommastandard dar
- 1. Wandle in Binärdarstellung um:
 - $58,25_{10} = 111010,01_2 = 1,1101001 \times 2^5$
- 2. Trage Felder des 32b Gleitkommawortes ein:
 - Vorzeichen: 1 (negativ)
 - 8 Bits für Exponent: $(127 + 5) = 132 = 10000100_2$
 - 23 Bits für Bruchanteil: 110 1001 0000 0000 0000 0000

1 Bit	8 Bits	23 Bits
1	100 0010 0	110 1001 0000 0000 0000 0000

Vorz.

Exponent

Bruchanteil

- In Hexadezimalschreibweise: 0xC2690000

IEEE 754 Gleitkommadarstellung: Sonderfälle

- Nicht alle benötigten Werte nach dem Schema darstellbar
 - Beispiel: 0, hat keine führende 1

Wert	Vorz.	Exponent	Bruchanteil
0	X	00000000	000000000000000000000000
∞	0	11111111	000000000000000000000000
$-\infty$	1	11111111	000000000000000000000000
NaN	X	11111111	Ein Wert $\neq 0$

NaN steht für “Not a Number” und stellt häufig Rechenfehler dar
Beispiele: $\sqrt{-1}$ oder $\log(-5)$.

Genauigkeit der Gleitkommadarstellungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Einfache Genauigkeit (*single-precision*):
 - 32-bit Darstellung
 - 1 Vorzeichenbit, 8 Exponentenbits, 23 Bits für Bruchanteil
 - Exponentenbias = 127
- Doppelte Genauigkeit (*double-precision*):
 - 64-bit Darstellung
 - 1 Vorzeichenbit, 11 Exponentenbits, 52 Bits für Bruchanteil
 - Exponentenbias = 1023

Rundungsmodi für Gleitkommazahlen



- **Overflow:** Betrag der Zahl ist zu groß, um korrekt dargestellt zu werden
- **Underflow:** Zahl ist zu nahe bei 0, um korrekt dargestellt zu werden

- **Rundungsmodi:**
 - Abrunden zu minus Unendlich
 - Aufrunden zu plus Unendlich
 - Hin zu Null
 - Hin zu nächster darstellbarer Zahl

- **Beispiel:** Runde $1,100101$ ($1,578125_{10}$) auf 3 Bits Bruchanteil
 - Ab: $1,100$
 - Auf: $1,101$
 - Zu Null: $1,100$
 - Zu nächster: $1,101$ ($1,625$ liegt näher an $1,578125$ als an $1,5$)

Addition von Gleitkommazahlen mit gleichem Vorzeichen



1. Exponenten- und Bruchanteile aus Gleitkommawort extrahieren
2. Bruchanteil um führende 1 erweitern, um Mantisse zu bilden
3. Vergleiche Exponenten
4. Schiebe Mantisse von Zahl mit kleinerem Exponenten nach rechts
(bis Exponenten gleich sind)
5. Addiere Mantissen
6. Normalisiere Mantisse und passe Exponent an, falls nötig
7. Runde Ergebnis entsprechend dem gewählten Rundungsmodus
8. Baue Gleitkommawort aus Exponenten und Bruchanteil des
Ergebnisses

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

Addiere die beiden Gleitkommazahlen

0x3FC00000

0x40500000

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

1. Extrahiere Exponenten und Bruchanteile aus 32b Worten

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	01111111	100 0000 0000 0000 0000 0000
Vorz.	Exponent	Bruchanteil

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	10000000	101 0000 0000 0000 0000 0000
Vorz.	Exponent	Bruchanteil

S **E** **F**

1. Zahl (N1): S1 = 0, E1 = 127 (= $\times 2^0$), F1 = ,1

2. Zahl (N2): S2 = 0, E2 = 128 (= $\times 2^1$), F2 = ,101

2. Erweitere Bruchanteile um führende 1, um Mantissen zu bilden

M1: 1,1

M2: 1,101

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

3. Vergleiche Exponenten

$E2 - E1 = 128 - 127 = 1$, N1 muss also um ein Bit geschoben werden

4. Mantisse von Zahl mit kleinerem Exponenten entsprechend nach rechts schieben

schiebe M1: $1,1 \gg 1 = 0,11$ ($\times 2^1$)

5. Mantissen addieren (haben jetzt den gleichen Exponenten)

$$\begin{array}{r} 0,11 \times 2^1 \\ + 1,101 \times 2^1 \\ \hline 10,011 \times 2^1 \end{array}$$

Beispiel: Addition von Gleitkommazahlen

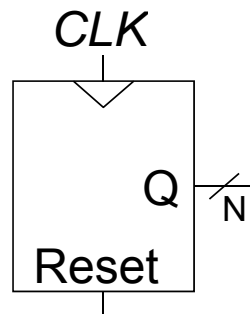
6. Normalisiere Mantisse und passe Exponenten an, falls nötig
 $10,011 \times 2^1 = 1,0011 \times 2^2$
7. Runde Ergebnis entsprechend Rundungsmodus
Hier nicht nötig (passt in 23b)
8. Baue neues Gleitkommawort für Ergebnis aus Exponent und Mantisse
 $S = 0, E = 2 + 127 = 129 = 10000001_2, F = 001100..0$

1 Bit	8 Bits	23 Bits
0	10000001	001 1000 0000 0000 0000 0000
Vorz.	Exponent	Bruchanteil

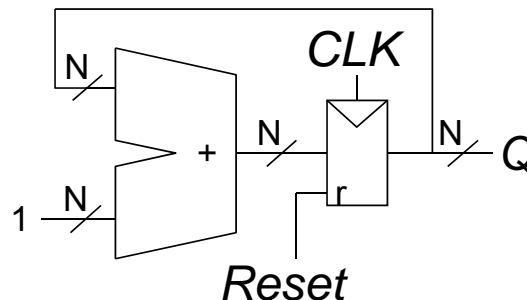
In Hexadezimalschreibweise: **0x40980000**

- Einfachster Fall: Inkrementieren zu jeder positiven Taktflanke
- Zählen durch einen Zyklus von Werten, Beispiel für 3b Breite
 - 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 000, 001...
- Beispielanwendungen
 - Digitaluhren
 - Programmzähler: Zeigt auf nächste auszuführende Instruktion

Symbol



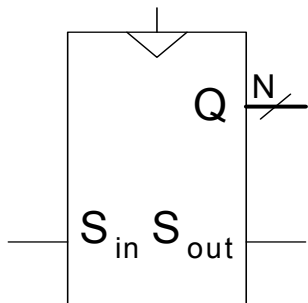
Aufbau



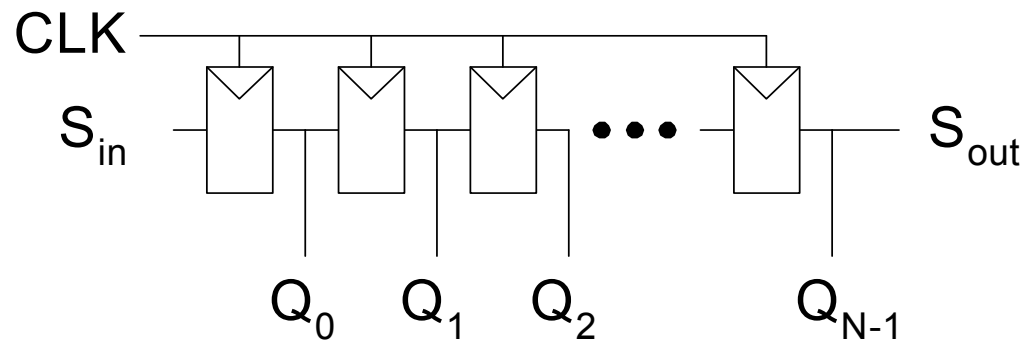
Schieberegister

- Auch: FIFO (*first-in first-out*)
- Schiebe einen neuen Wert jeden Takt ein
- Schiebe einen alten Wert jeden Takt aus
- Kann auch agieren als Seriell-nach-Parallel-Konverter
 - Konvertiert serielle Eingabe (S_{in}) in parallele Ausgabe ($Q_{0:N-1}$)

Symbol:

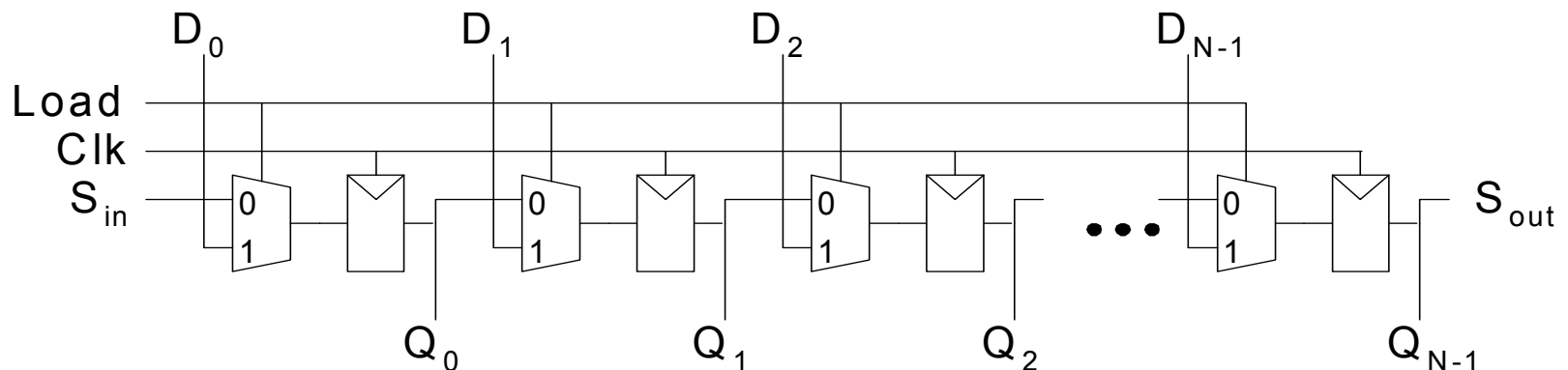


Aufbau:

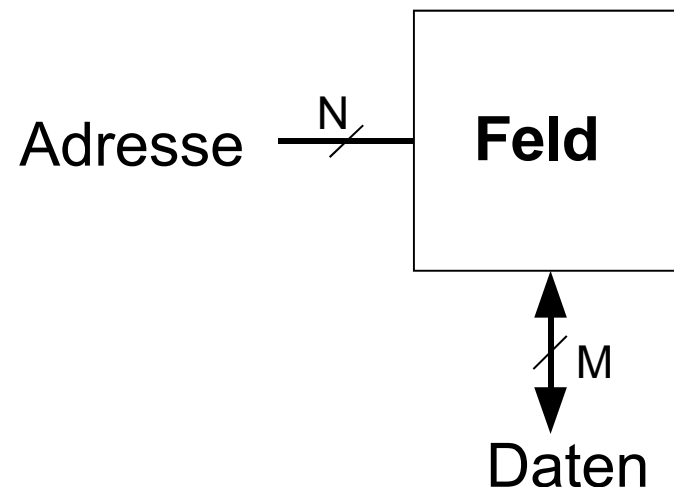


Schieberegister mit parallelem Laden

- Bei $Load = 1$: Agiert als normales N -bit Register
- Bei $Load = 0$: Agiert als Schieberegister
- Verwendbar als
 - Seriell-nach-Parallelkonverter (S_{in} nach $Q_{0:N-1}$)
 - Parallel-nach-Seriellkonverter ($D_{0:N-1}$ nach S_{out})



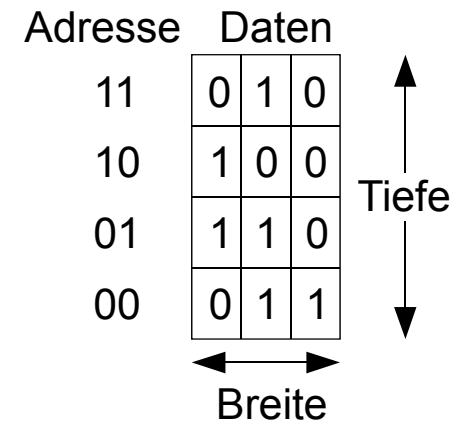
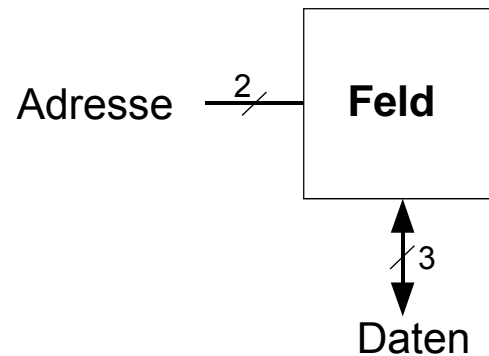
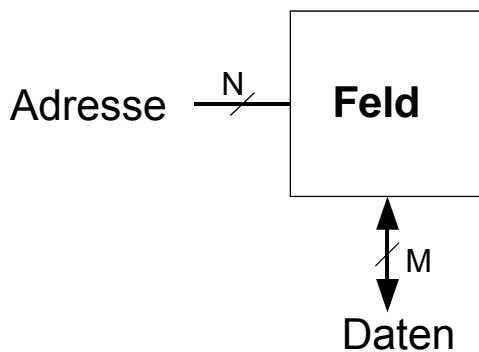
- Können effizient größere Datenmengen speichern
- Drei weitverbreitete Typen:
 - Dynamischer Speicher mit wahlfreiem Zugriff
 - (*Dynamic random access memory*, DRAM)
 - Statischer Speicher mit wahlfreiem Zugriff
 - (*Static random access memory*, SRAM)
 - Nur-Lesespeicher (*Read only memory*, ROM)
- An jede N -bit Adresse kann ein M -bit breites Datum geschrieben werden



Speicherfelder



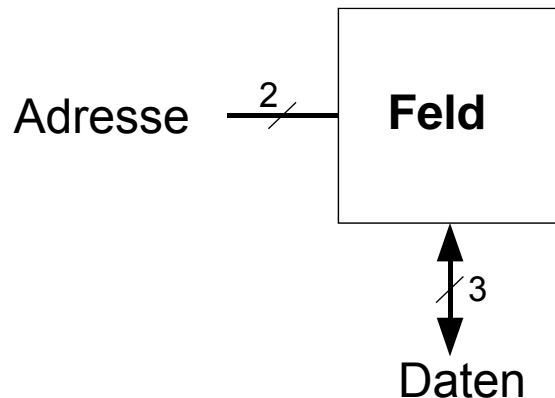
- Zweidimensionales Feld von Bit-Zellen
- Jede Bit-Zelle speichert ein Bit
- Feld mit N Adressbits und M Datenbits:
 - 2^N Zeilen und M Spalten
 - **Tiefe:** Anzahl von Zeilen (Anzahl von Worten)
 - **Breite:** Anzahl von Spalten (Bitbreite eines Wortes)
 - **Feldgröße:** Tiefe \times Breite = $2^N \times M$



Beispiel: Speicherfeld

- $2^2 \times 3$ -Bit Feld
- Anzahl Worte: 4
- Wortbreite: 3-Bit
- Beispiel: 3-Bit gespeichert an Adresse 2'b10 ist 3'b100

Beispiel:

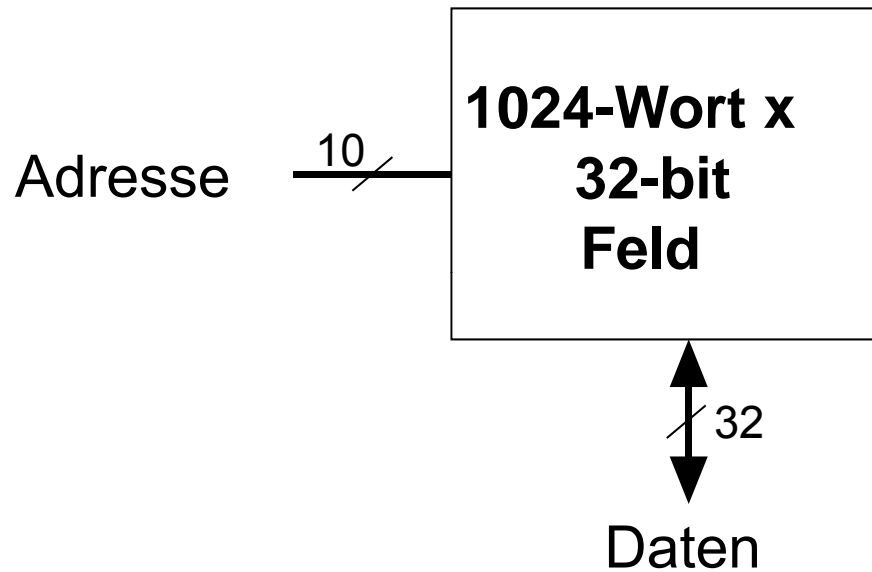


Adresse	Daten		
11	0	1	0
10	1	0	0
01	1	1	0
00	0	1	1

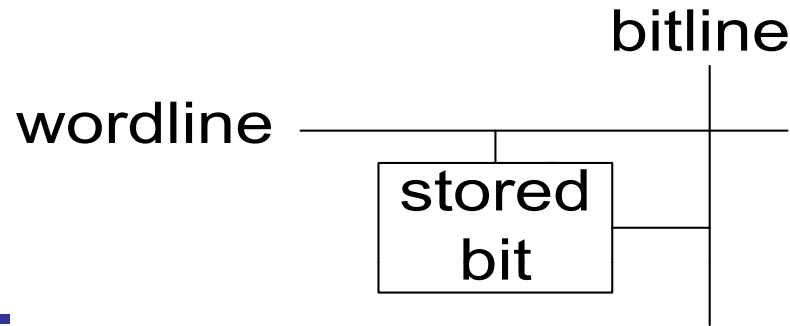
Breite

Tiefe

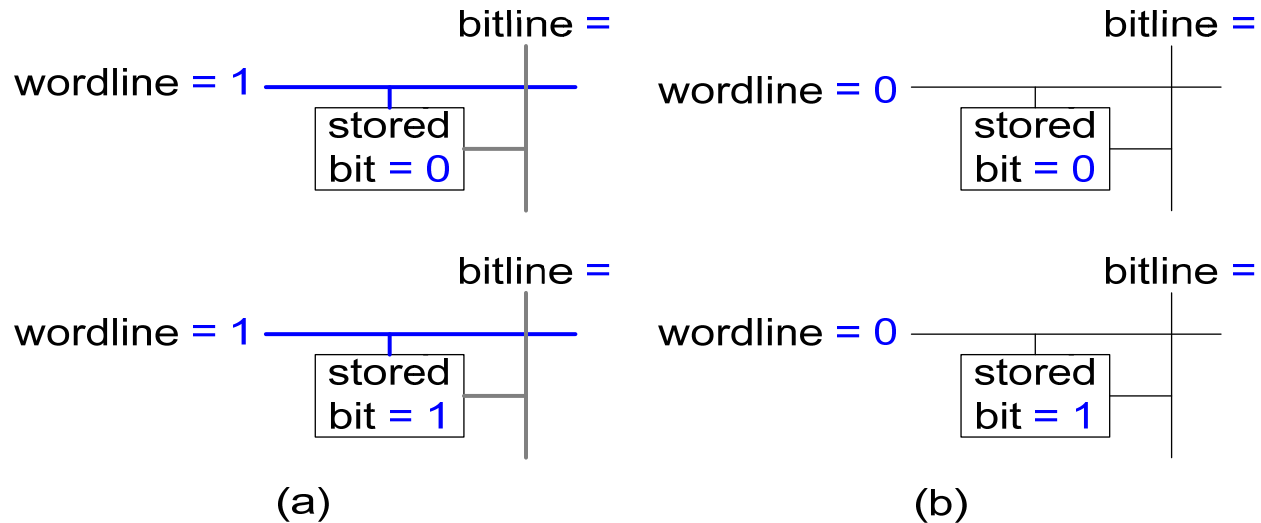
Speicherfelder



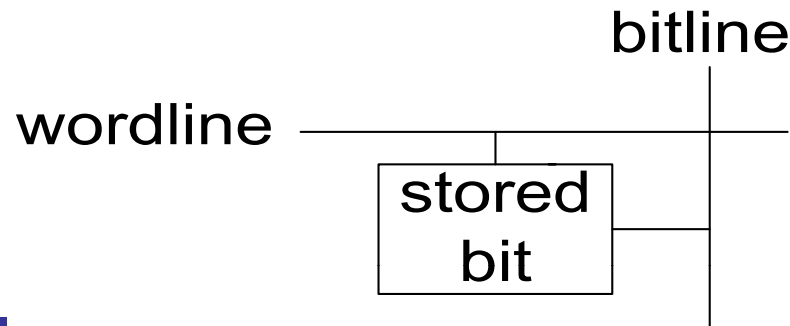
Bit-Zellen für Speicherfelder



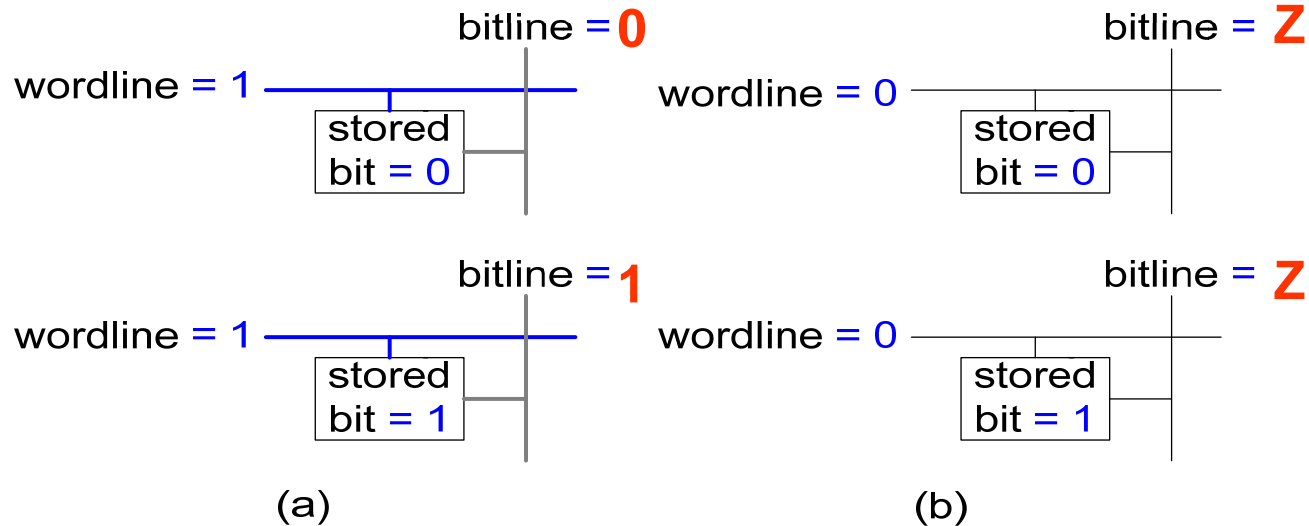
Beispiel:



Aufbau von Speicherfeldern aus Bit-Zellen



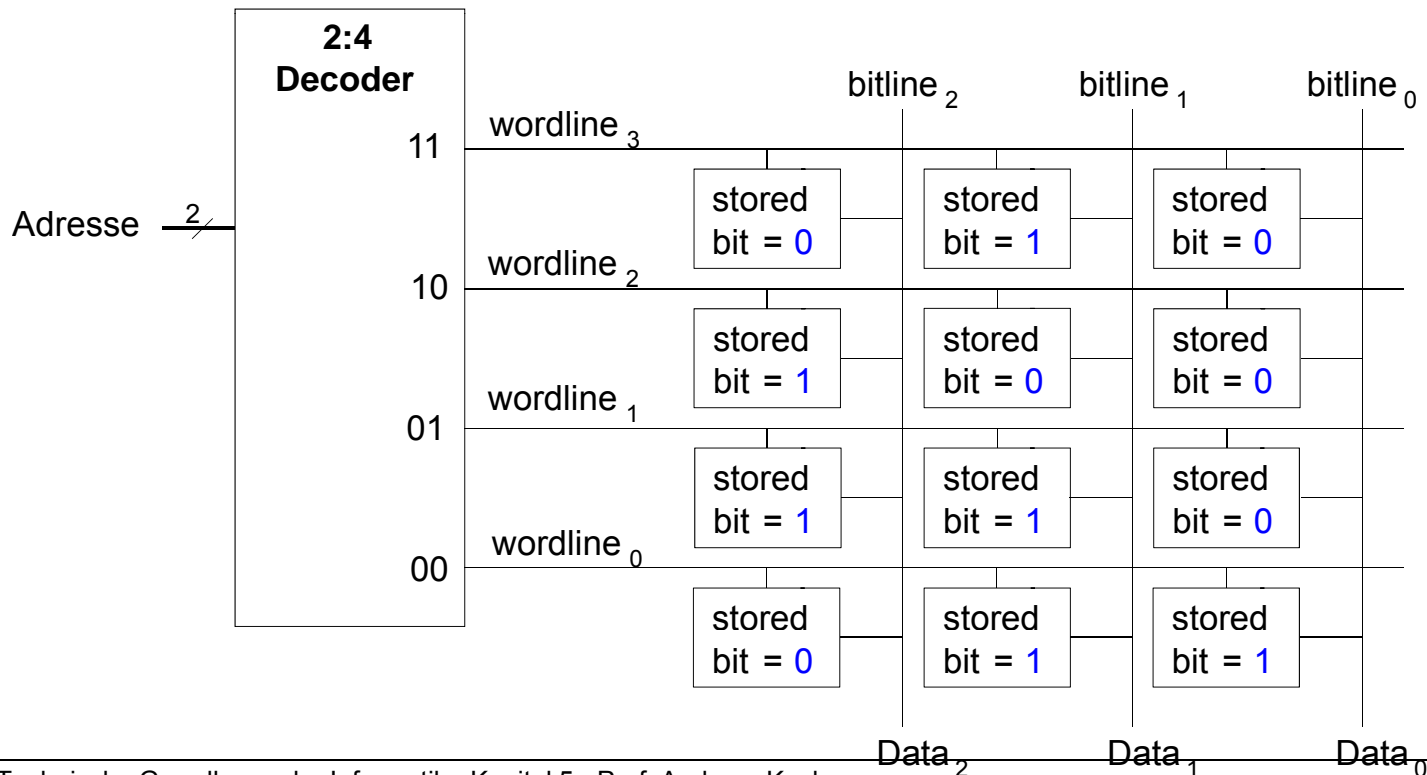
Beispiel:



Aufbau von Speicherfeldern

▪ Wordline:

- Vergleichbar mit Enable-Signal
- Erlaubt Zugriff auf eine Zeile des Speichers zum Lesen oder Schreiben
- Entspricht genau einer eindeutigen Adresse
- Maximal eine Wordline ist zu jedem Zeitpunkt HIGH



Arten von Speicher: Historische Sicht



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Speicher mit wahlfreiem Zugriff (RAM)
- Nur-Lese Speicher (ROM)

RAM: Random-Access Memory



- **Flüchtig:** Speicherinhalte gehen bei Verlust der Betriebsspannung verloren
- Kann i.d.R. gleich schnell gelesen und geschrieben werden
- Zugriff auf beliebige Adressen mit ähnlicher Verzögerung möglich
- Hauptspeicher moderner Computer ist dynamisches RAM (DRAM)
 - Aktuell & genauer: DDR3-SDRAM
 - *Double Data Rate 3 - Synchronous Dynamic Random Access Memory*
- Name „RAM“ ist historisch gewachsen
 - Früher unterschiedliche Zugriffszeiten auf unterschiedliche Adressen
 - Bandspeicher, Trommelspeicher, Ultraschall-Laufzeitspeicher, ...

ROM: Read-Only Memory



- **Nicht-flüchtig:** Erhält Speicherinhalt auch ohne Betriebsspannung
- Schnell lesbar
- Schreibbar nur sehr langsam (wenn überhaupt)
- Flash-Speicher ist in diesem Sinne ein ROM
 - Kameras
 - Handys
 - MP3-Player
- Auch hier Nomenklatur „ROM“ historisch
 - Auch aus ROMs kann von beliebigen Adressen gelesen werden
 - Es gibt auch schreibbare Arten von ROMs
 - PROMs, EPROMs, EEPROMs, Flash

Arten von RAM



- Zwei wesentliche Typen:
 - Dynamisches RAM (DRAM)
 - Statisches RAM (SRAM)
- Verwenden unterschiedliche Speichertechniken in den Bit-Zellen:
 - DRAM: Kondensator
 - SRAM: Kreuzgekoppelte Inverter

Robert Dennard, 1932 -



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

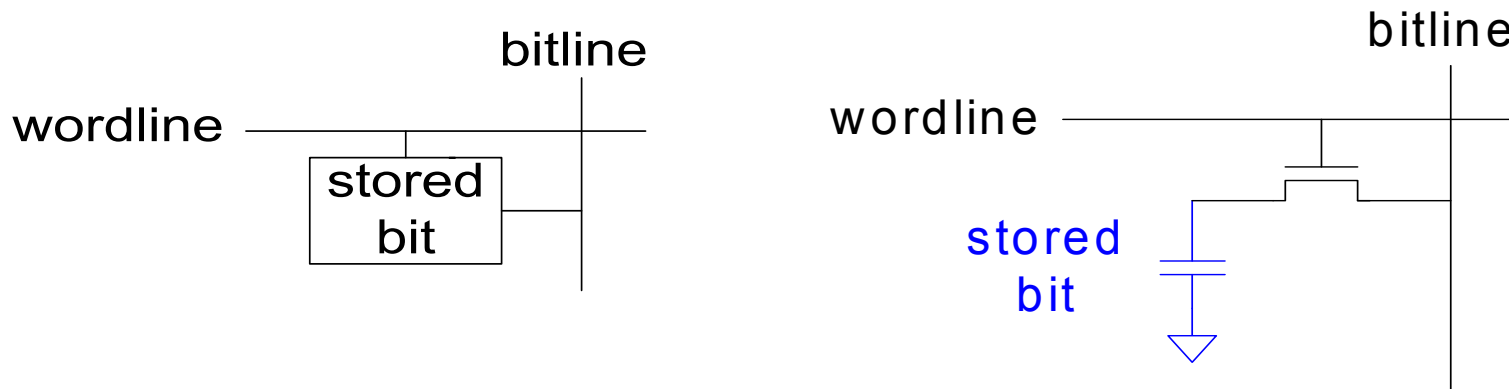
- Erfand 1966 bei IBM das DRAM
- Anfangs große Skepsis, ob Technik praktikabel
- Seit Mitte der 1970er Jahre ist DRAM die am weitesten verbreitete Speichertechnik in Computern



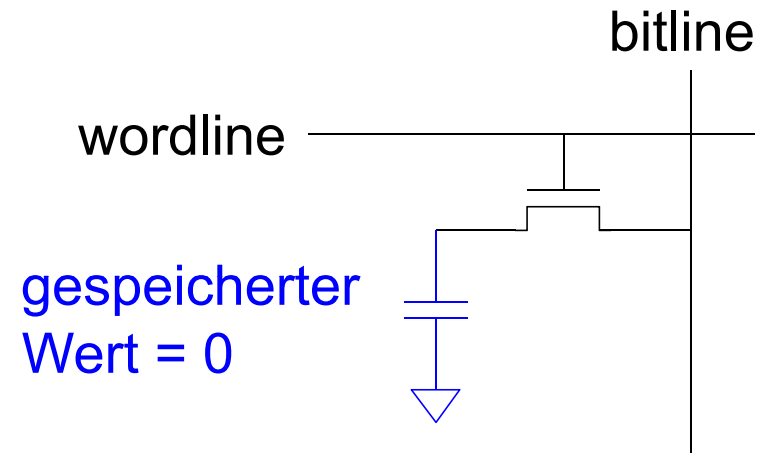
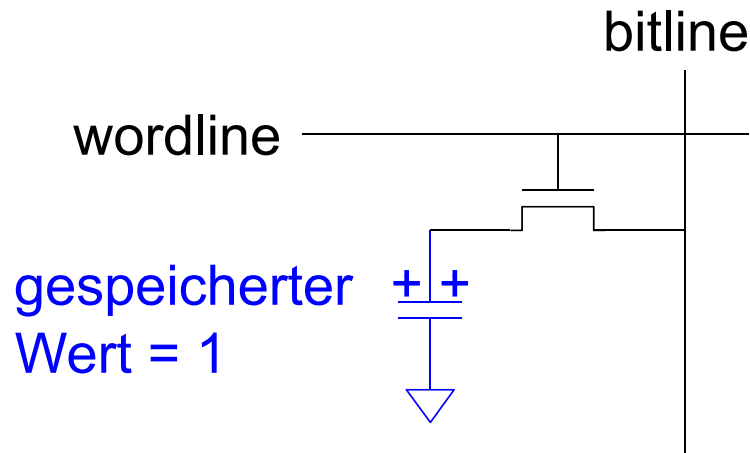
DRAM Bit-Zelle



- Datenbit wird als Ladezustand eines Kondensators gespeichert
- Dynamisch: Der Speicherwert muss periodisch neu geschrieben werden
 - Auffrischung alle paar Millisekunden erforderlich (üblich: 64ms)
 - Kondensator verliert Ladung durch Leckströme
 - ... und beim Auslesen

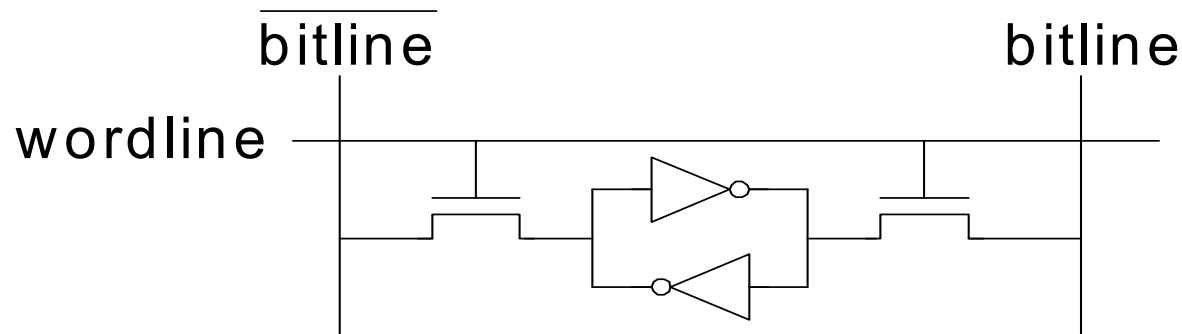
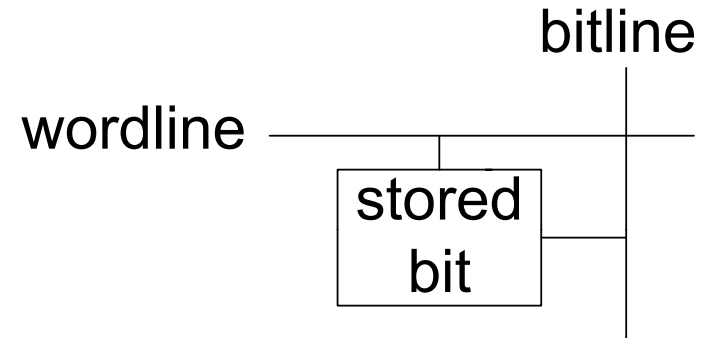


DRAM Bit-Zelle

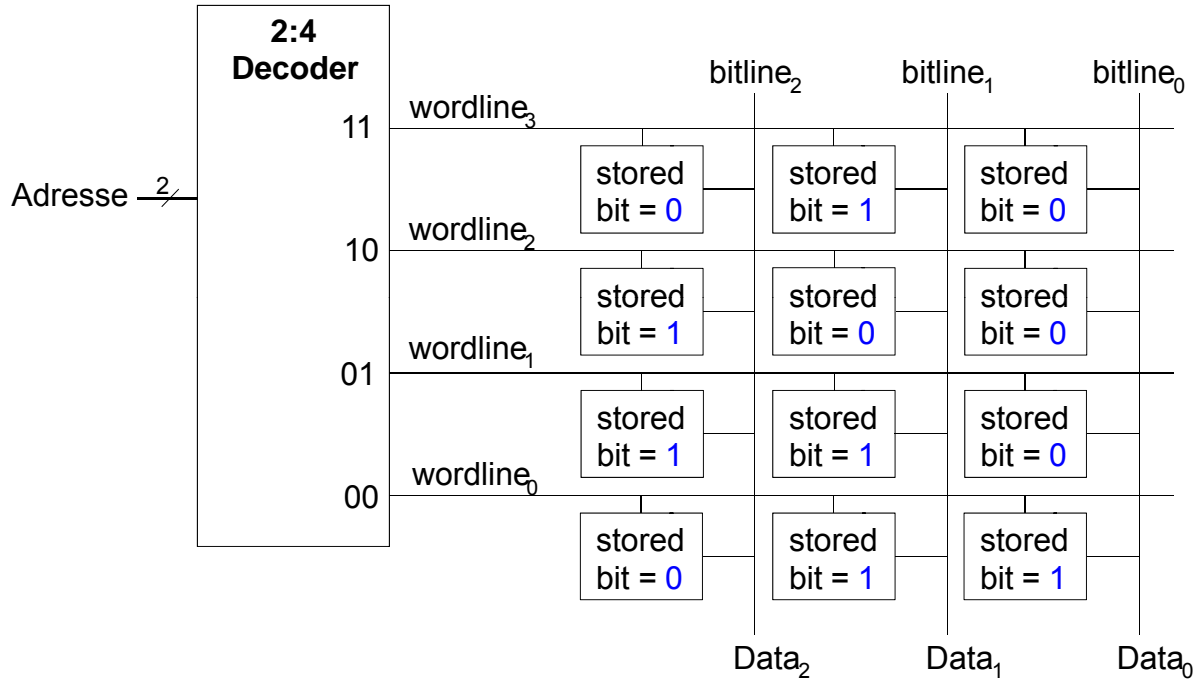


SRAM Bit-Zelle

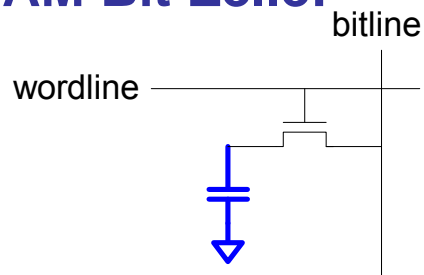
- Datenbit wird als Zustand von rückgekoppelten Invertern gespeichert
- Statisch: Keine Auffrischung erforderlich
 - Inverter treiben Werte auf gültige Logikpegel



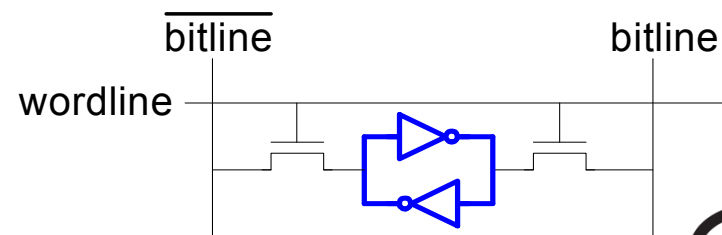
Speicherfelder



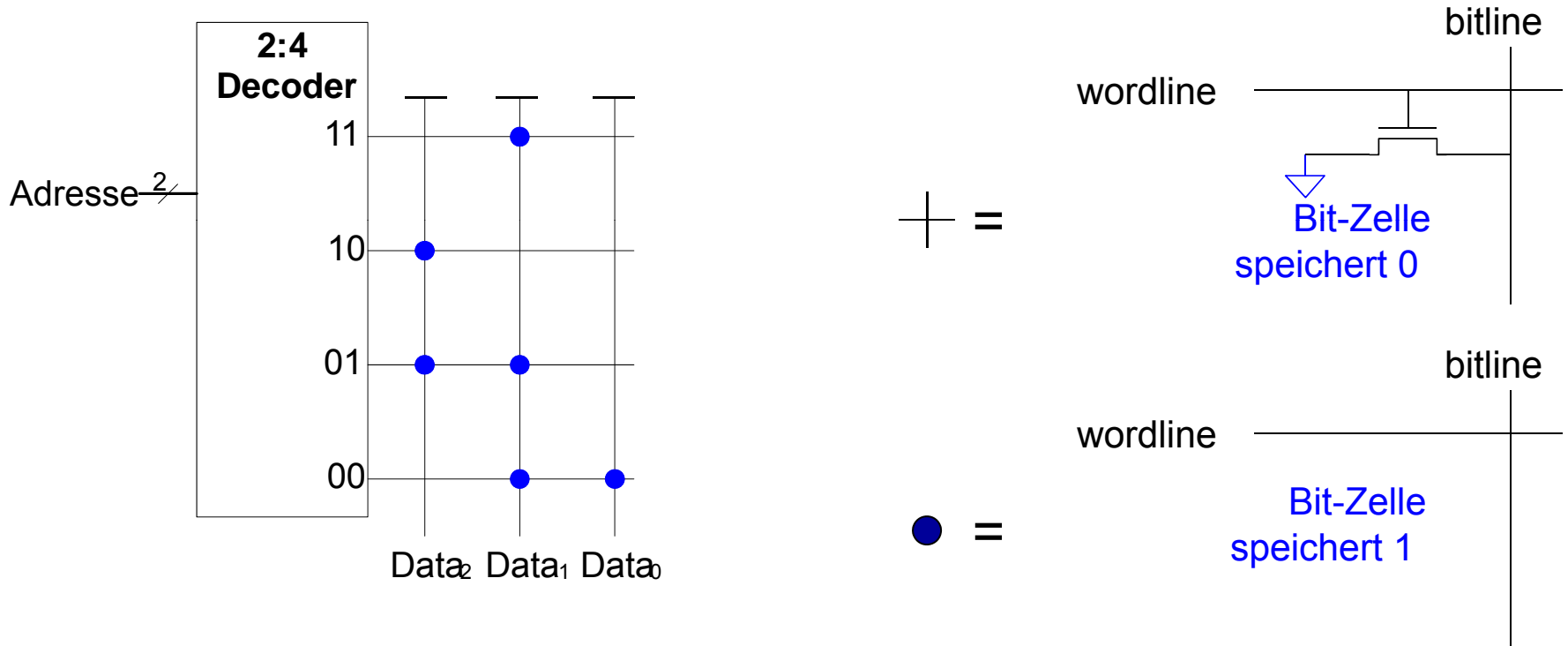
DRAM Bit-Zelle:



SRAM Bit-Zelle:



ROMs: Aufbau der Bit-Zellen



Bitlines sind **schwach** auf HIGH getrieben

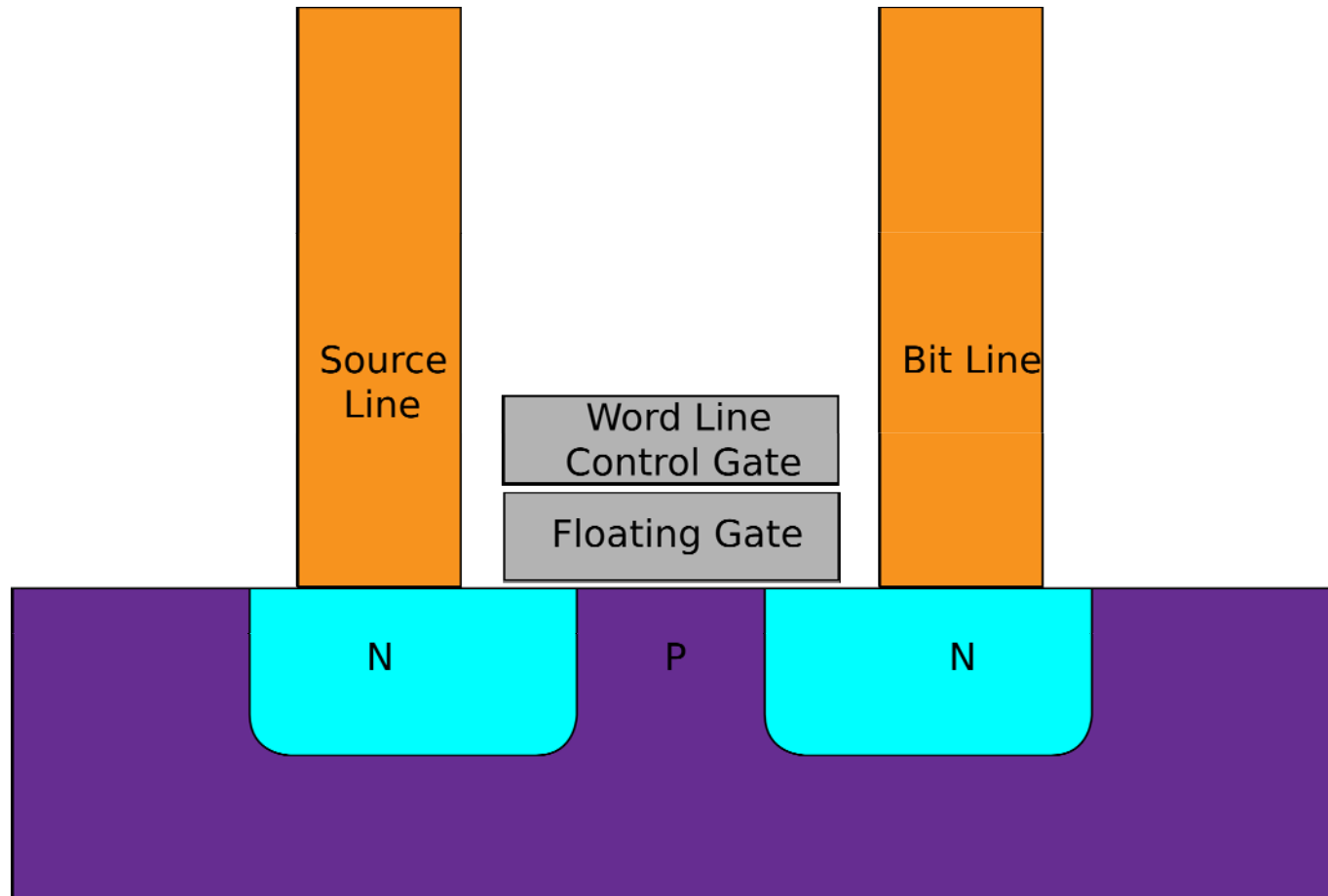
Fujio Masuoka, 1944-



- Entwickelte Speicher und schnelle Schaltungen bei Toshiba von 1971-1994
- Erfand Flash-Speicher als eigenes ungenehmigtes Projekt in den späten 1970ern
 - An Wochenenden und abends
- Löschvorgang erinnerte ihn an Kamerablitz
 - Deshalb Flash-Speicher
- Toshiba kommerzialisierte Technik nur zögerlich
- Erste kommerzielle Chips von Intel in 1988
- Flash-Produkte haben großen Erfolg
 - Derzeit USD 25 Milliarden Umsatz / Jahr

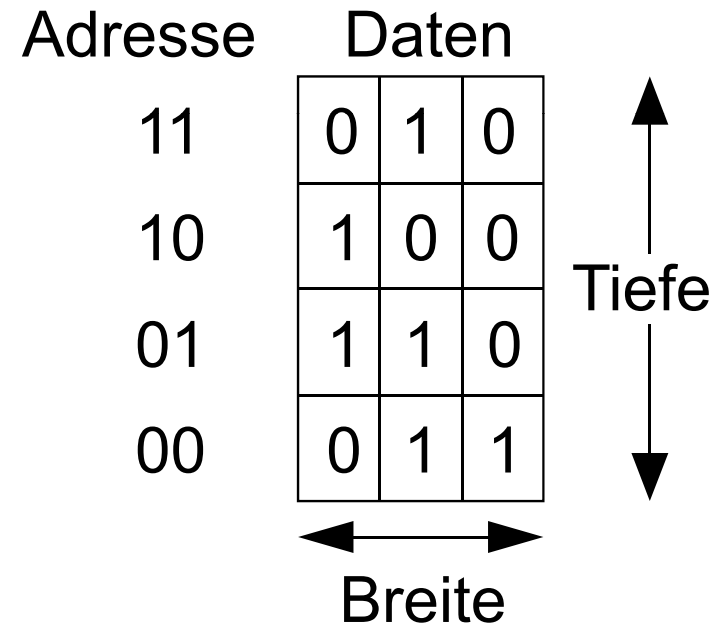
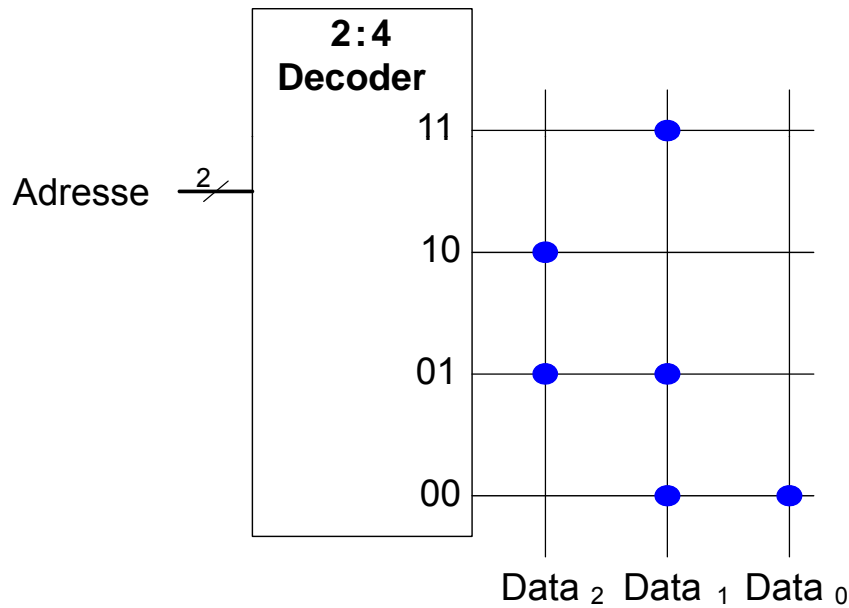


Flash-Speicher: Bit-Zelle

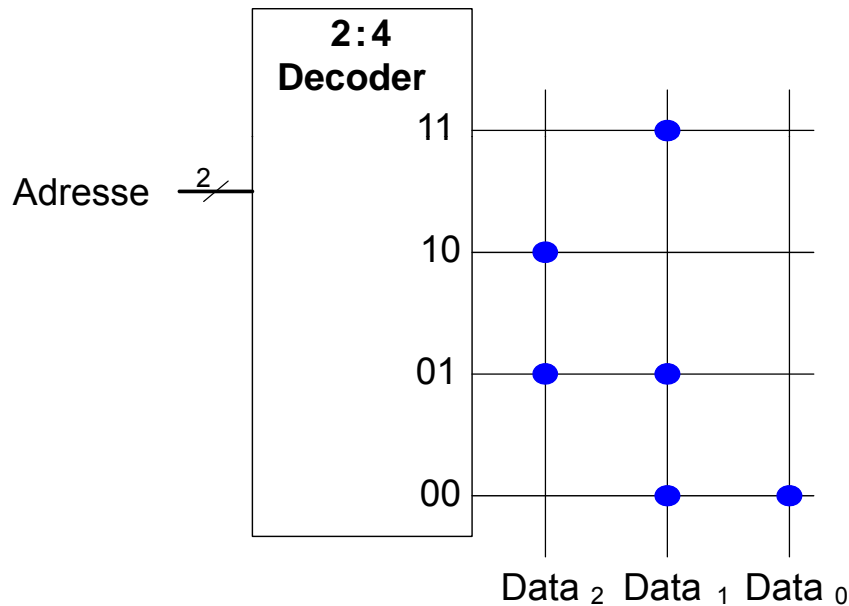


Quelle: Wikipedia

ROMs als Datenspeicher



ROMs als Wertetabellen für boolesche Logik



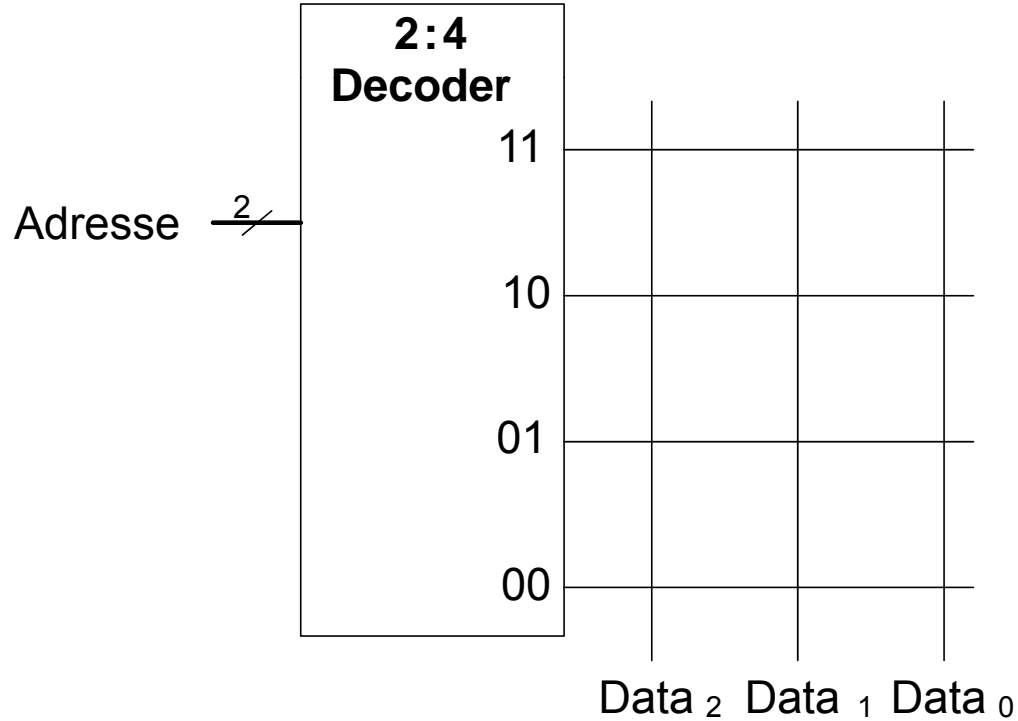
$$Data_2 = A_1 \oplus A_0$$

$$Data_1 = \overline{A_1} + A_0$$

$$Data_0 = \overline{A_1} \overline{A_0}$$

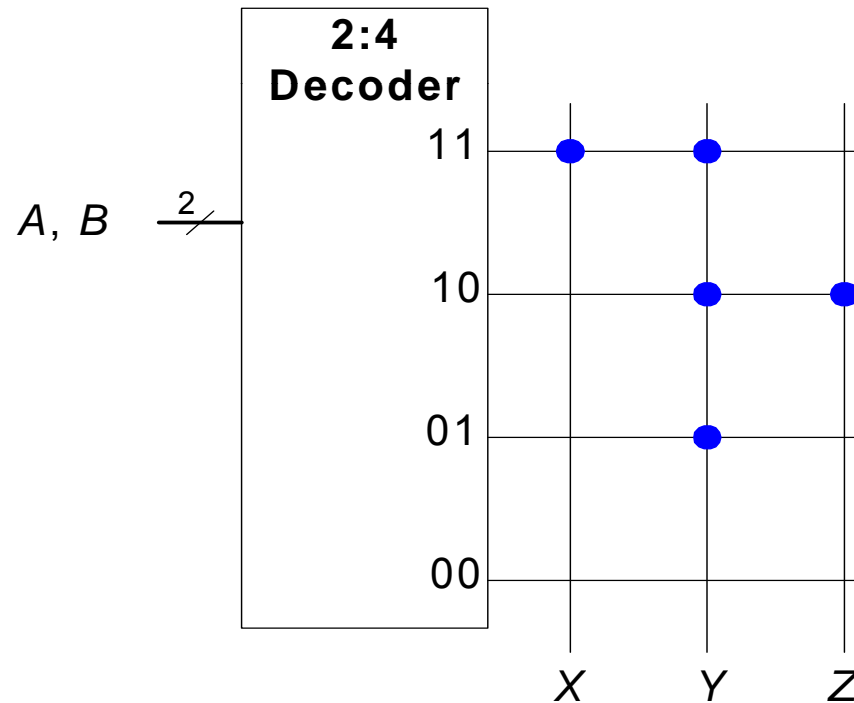
Beispiel: Logik aus ROMs

- Implementierung der folgenden logischen Funktionen durch $2^2 \times 3$ -bit ROM:
 - $X = AB$
 - $Y = A + B$
 - $Z = \overline{AB}$

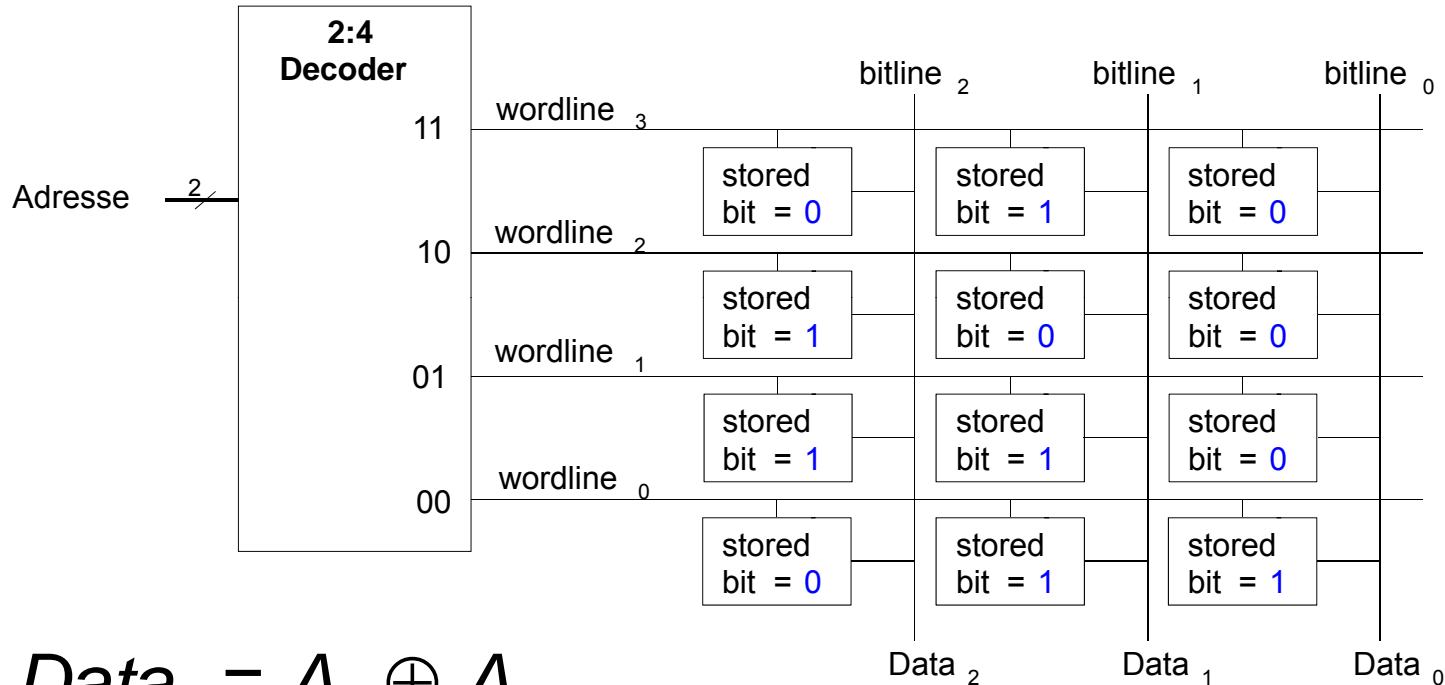


Beispiel: Logik aus ROMs

- Implementierung der folgenden logischen Funktionen durch $2^2 \times 3$ -bit ROM:
 - $X = AB$
 - $Y = A + B$
 - $Z = \overline{AB}$



Logik aus beliebigem Speicherfeld



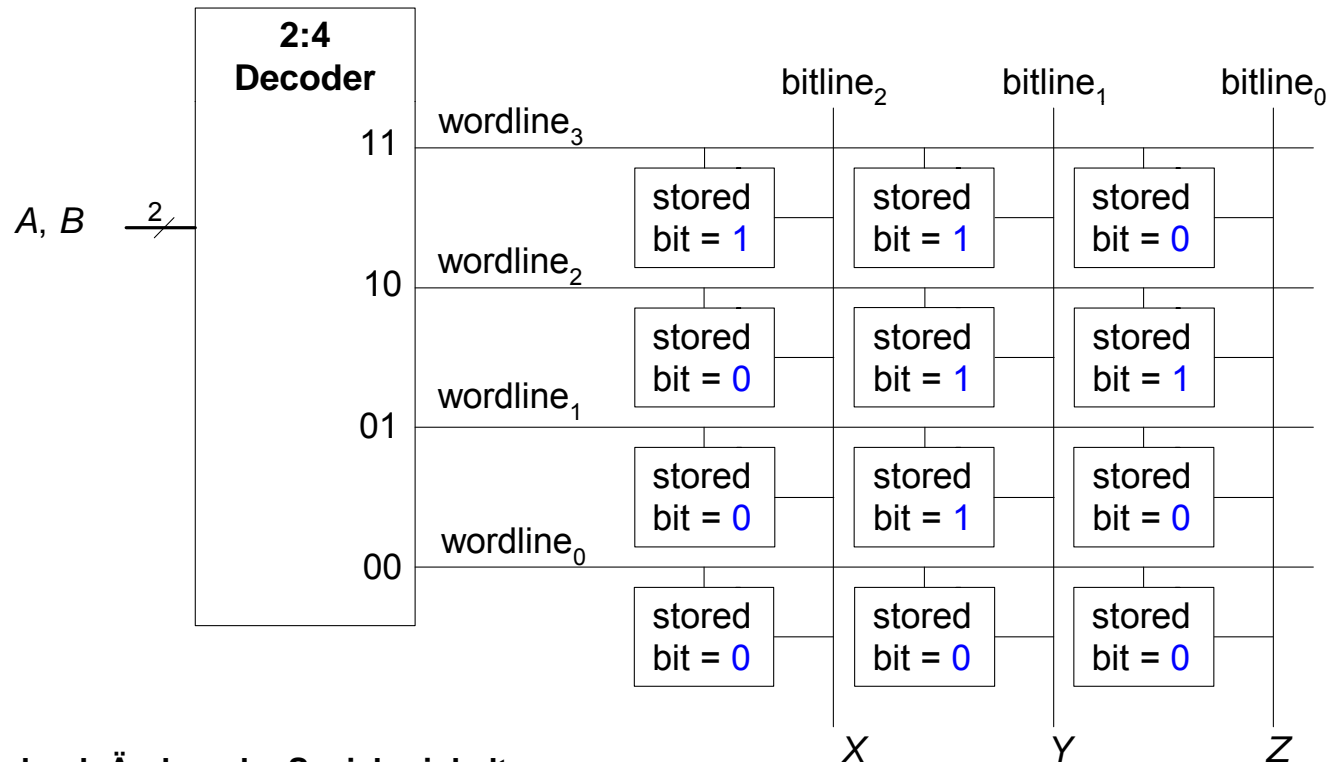
$$Data_2 = A_1 \oplus A_0$$

$$Data_1 = \overline{A_1} + A_0$$

$$Data_0 = \overline{A_1} \overline{A_0}$$

Logik aus beliebigem Speicherfeld

- Implementierung der folgenden logischen Funktionen durch $2^2 \times 3$ -bit RAM:
 - $X = AB$
 - $Y = A + B$
 - $Z = \overline{AB}$



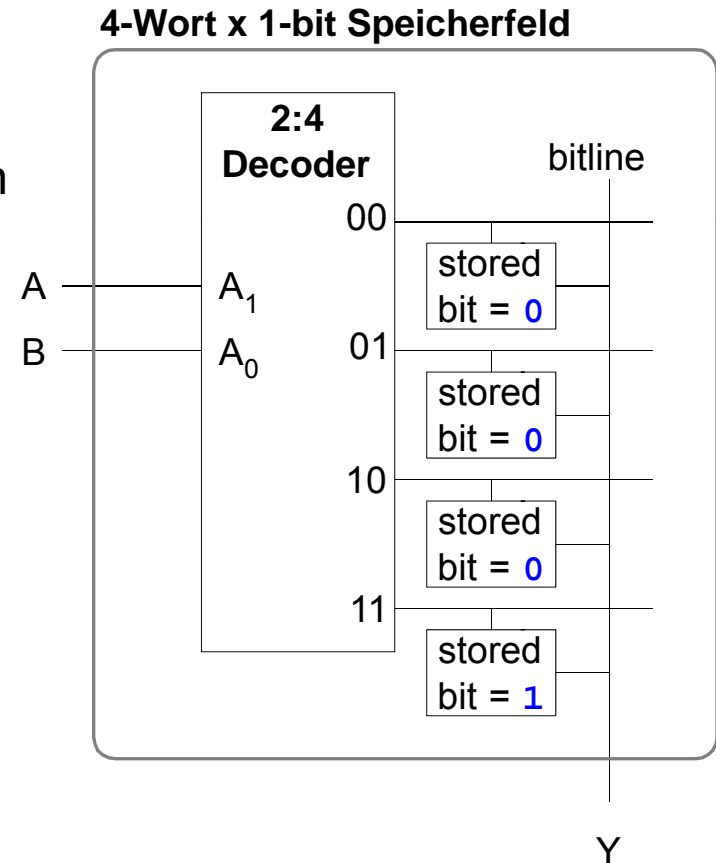
Andere Funktion nur durch Ändern der Speicherinhalte

Logik aus beliebigen Speicherfeldern

- Speicherfelder speichern Wertetabellen
 - Lookup-Tables (LUTs)
- Wort aus Eingangsvariablen bildet Adresse
- Für jede Kombination von Eingangsvariablen ist Funktionsergebnis abgespeichert

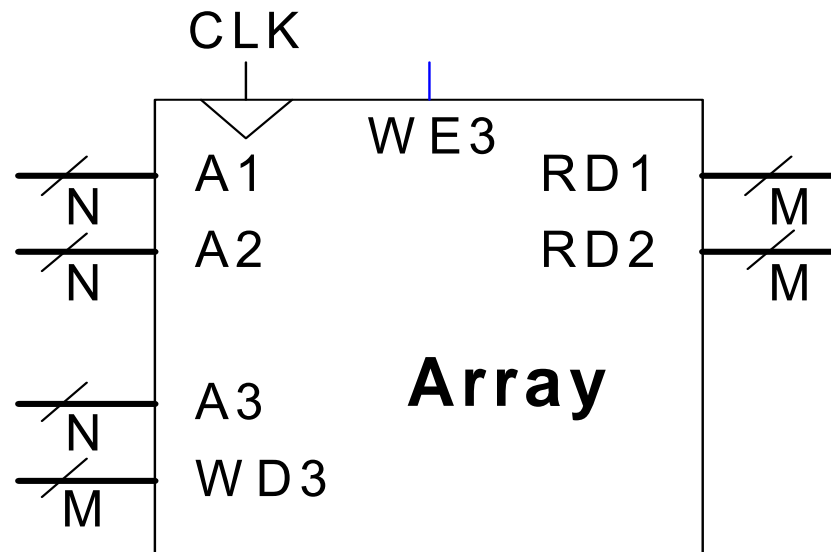
**Werte-
tabelle**

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Multi-Port-Speicher

- **Port:** Zusammengehörige Anschlüsse für Adresse und Datum
- Drei-Port Speicher
 - 2 Lese-Ports (A1/RD1, A2/RD2)
 - 1 Schreib-Port (A3/WD3, Signal WE3 löst Schreiben aus)
- Kleine Multi-Port-Speicher werden als Registerfelder bezeichnet
 - Werden z.B. in Prozessoren eingesetzt



Speicherfeld in Verilog



```
// 256 x 3b Speicher mit einem Schreib/Lese-Port
```

```
module dmem( input          clk, we,  
             input  [7:0]   a  
             input  [2:0]   wd,  
             output [2:0]   rd);
```

```
    reg  [2:0] RAM[255:0];
```

```
    assign rd = RAM[a];
```

```
    always @(posedge clk)  
        if (we)  
            RAM[a] <= wd;
```

```
endmodule
```

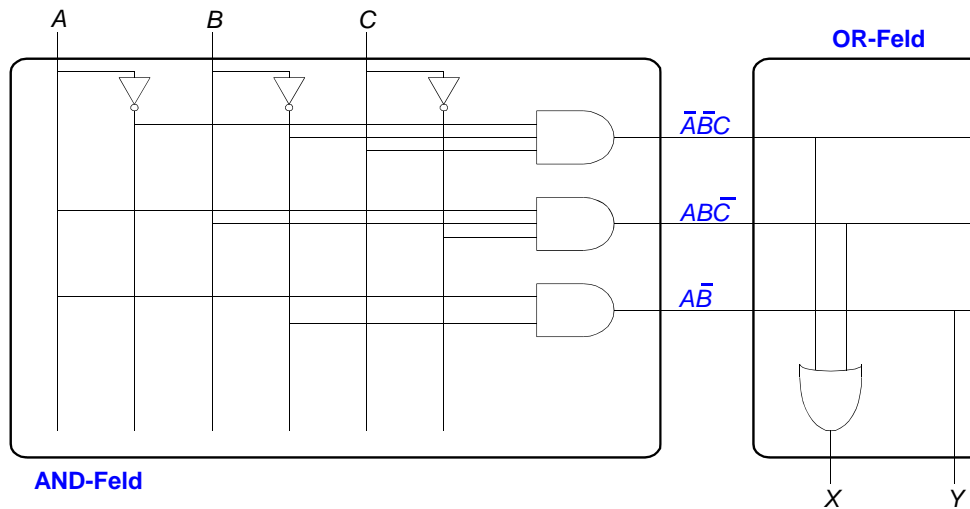
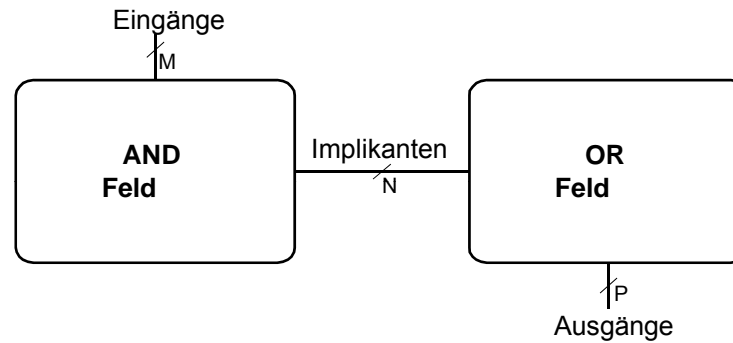
Logikfelder (*logic arrays*)



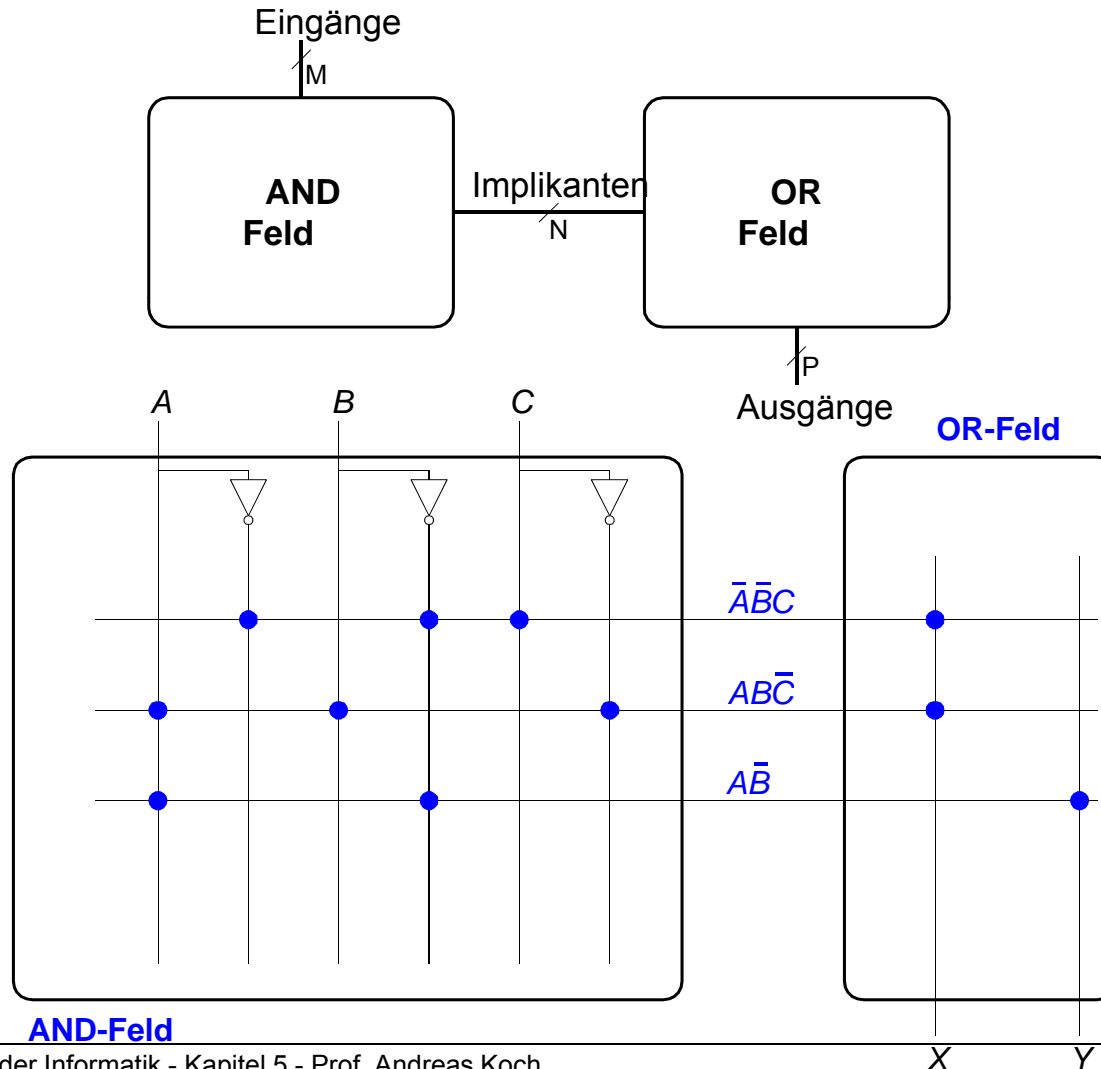
- Programmable Logic Arrays (PLAs)
 - AND Feld gefolgt von OR Feld
 - Kann nur kombinatorische Logik realisieren
 - Feste interne Verbindungen, spezialisiert für DNF (SoP-Form)
- Field Programmable Gate Arrays (FPGAs)
 - Feld von konfigurierbaren Logikblöcken (CLBs)
 - Können kombinatorische und sequentielle Logik realisieren
 - Programmierbare Verbindungsknoten zwischen Schaltungselementen

Boole'sche Funktionen mit PLAs: Idee

- $X = \overline{A}BC + A\overline{B}C$
- $Y = A\overline{B}$



PLAs: Vereinfachte Schreibweise

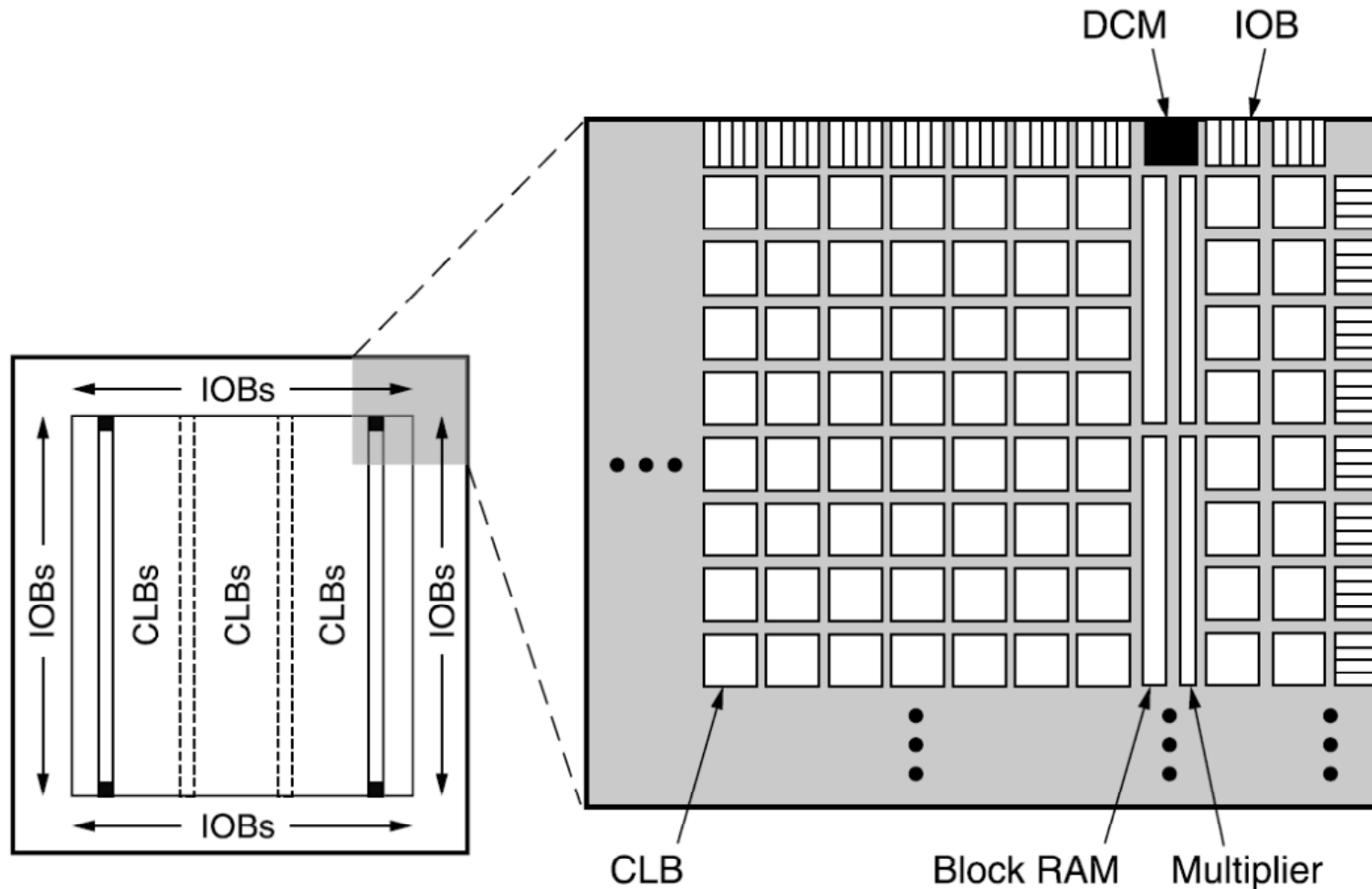


FPGAs: Field Programmable Gate Arrays



- Bestehen grundsätzlich aus:
 - **CLBs** (Configurable Logic Blocks): Realisieren kombinatorische und sequentielle Logik
 - Konfigurierbare Logikblöcke
 - **IOBs** (Input/Output Blocks): Schnittstelle vom Chip zur Außenwelt
 - Ein-/Ausgabeblocke
 - **Programmierbares Verbindungsnetz**: verbindet CLBs und IOBs
 - Kann flexibel Verbindungen je nach Bedarf der aktuellen Schaltung herstellen
- Reale FPGAs enthalten oftmals noch weitere Arten von Blöcken
 - RAM
 - Multiplizierer
 - Manipulation von Taktsignalen (DCM)
 - Sehr schnelle serielle Verbindungen (11 Gb/s)
 - Komplette Mikroprozessoren
 - ...

Struktur eines Xilinx Spartan 3 FPGA



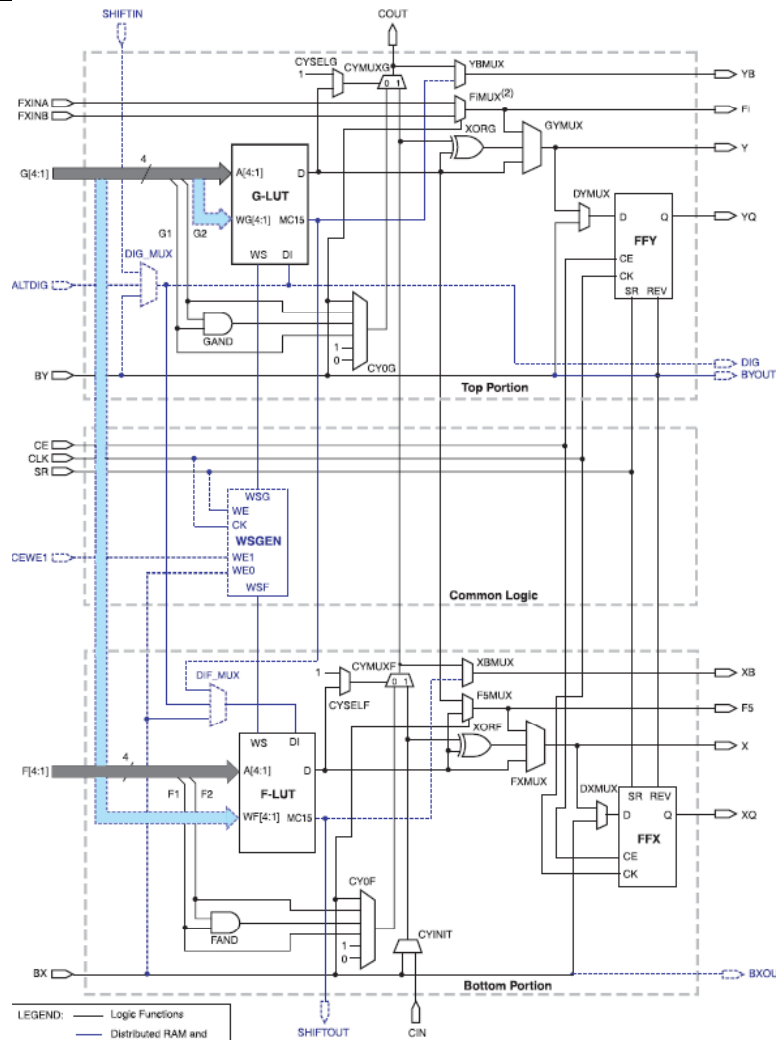
Konfigurierbare Logikblöcke (CLBs)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Bestehen im wesentlichen aus:
 - **LUTs** (lookup tables): realisieren kombinatorische Funktionen
 - **Flip-Flops**: realisieren sequentielle Funktionen
 - **Multiplexern**: Verbinden LUTs und Flip-Flops

Xilinx Spartan 3 CLB



Xilinx Spartan 3 CLB



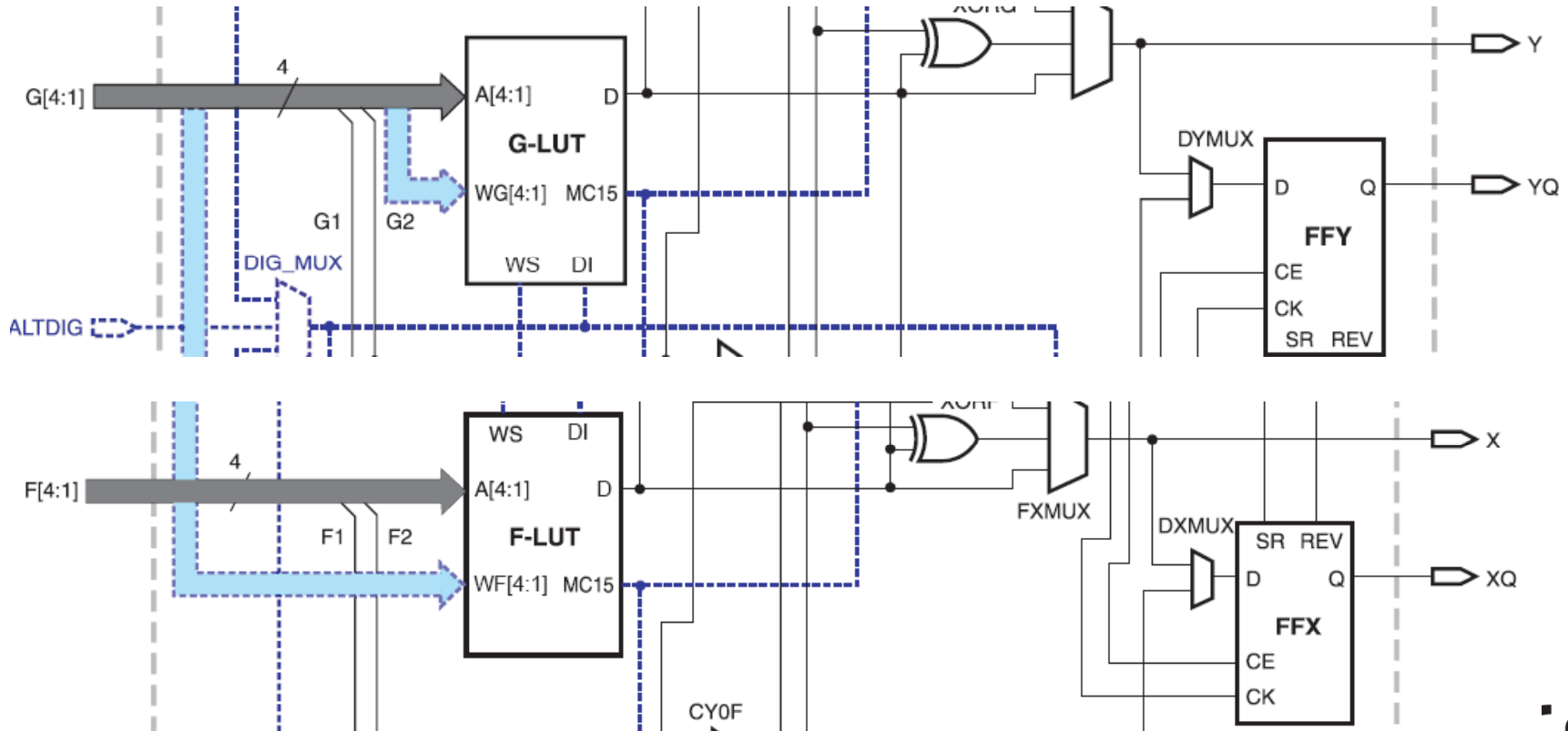
- Ein Spartan 3 CLB enthält:
 - 2 LUTs:
 - F-LUT ($2^4 \times 1$ -bit LUT)
 - G-LUT ($2^4 \times 1$ -bit LUT)
 - 2 sequentielle Ausgänge:
 - XQ
 - YQ
 - 2 kombinatorische Ausgänge:
 - X
 - Y

Beispiel: Kombinatorische Logik mit CLBs

- Berechnung der folgenden Funktionen mit dem Spartan 3 CLB

- $X = \overline{A}BC + A\overline{B}C$

- $Y = A\overline{B}$

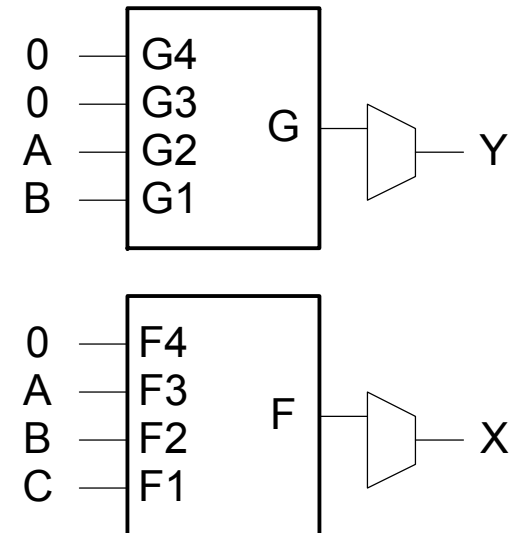


Beispiel: Kombinatorische Logik mit CLBs

- Berechnung der folgenden Funktionen mit dem Spartan 3 CLB
 - $X = \overline{A}BC + A\overline{B}C$
 - $Y = A\overline{B}$

	(A)	(B)	(C)	(X)
F4	F3	F2	F1	F
X	0	0	0	0
X	0	0	1	1
X	0	1	0	0
X	0	1	1	0
X	1	0	0	0
X	1	0	1	0
X	1	1	0	1
x	1	1	1	0

	(A)	(B)	(Y)	
G4	G3	G2	G1	G
X	X	0	0	0
X	X	0	1	0
X	X	1	0	1
X	X	1	1	0





- Wird in der Regel durch Entwurfswerkzeuge unterstützt
 - Beispiel: Xilinx ISE
- Ist in der Regel ein iterativer Prozess
 - Planen
 - Implementieren
 - Simulieren
 - Wiederhole ...
- Entwickler denkt nach
- Entwickler gibt Entwurf als Schaltplan oder HDL-Beschreibung ein
- Entwickler wertet Simulationsergebnisse aus
- Wenn Simulation zufriedenstellend: Synthetisiere Entwurf in Netzliste
- Bilde Netzliste auf FPGA-Konfiguration ab (CLBs, IOBs, Verbindungsnetz)
- Lade Konfigurationsdaten (*bit stream*) auf FPGA
- Teste Schaltung nun in realer Hardware