



11.05.2006

Technische Grundlagen der Informatik II

2. Übung – Zahlen

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Zahlensysteme

a) Welche Zahl ist größer? Konvertieren sie die Zahlen vor dem Vergleich in die Basis 16.

- 011010_2 oder $A9_{16}$

Lösung:

$$1A_{16} < A9_{16}$$

- $7F1_{16}$ oder 2019_{10}

Lösung:

$$7F1_{16} > 7E3_{16}$$

b) Berechnen Sie folgendes, indem Sie die Werte zuerst in die Basis 10 umwandeln:

- $0110011_2 + 00110111_2$

Lösung:

$$51 + 55 = 106$$

- $E8A_{16} + 263_8$

Lösung:

$$3722 + 179 = 3901$$

c) Konvertieren Sie 22_{10} mit der Divisionsmethode in die Basis 2.

Lösung:

$$\begin{aligned} 22/2 &= 11 & r &= 0 \\ 11/2 &= 5 & r &= 1 \\ 5/2 &= 2 & r &= 1 \\ 2/2 &= 1 & r &= 0 \\ 1/2 &= 0 & r &= 1 \Rightarrow 10110_2 \end{aligned}$$

d) Konvertieren Sie 1111011_2 mit der Multiplikationsmethode (Horner-Schema) in die Basis 10.

Lösung:

$$((((1 * 2 + 1) * 2 + 1) * 2 + 1) * 2 + 0) * 2 + 1 = 123$$

e) Konvertieren Sie 2122001_3 in die Basis 9.

Lösung:

$$2561_9$$

f) Um das Zweierkomplement einer Ganzzahl zu berechnen, können die einzelnen binären Ziffern der Zahl invertiert werden (0 wird zu 1 und umgekehrt) und dann wird das so entstandene Einerkomplement um Eins erhöht. Füllen Sie die Tabelle aus:

Lösung:

Zahl in 2K Darstellung ¹	Einerkomplement	Zweierkomplement
0100 1101	1011 0010	1011 0011
1001 0000	0110 1111	0111 0000

Die Begriffe *Komplement* und *Komplementbildung* werden oft missverständlich verwendet. Zum einen gibt es die Darstellung einer Zahl im Zweierkomplement, also eine bestimmte Form der Kodierung von Binärzahlen sowie die Abbildung von und in diese Kodierung. Zum anderen wird die arithmetische Negation einer schon in 1K- oder 2K-Darstellung notierten Zahl ebenfalls als Komplementbildung bezeichnet, der negierte Wert als Komplement. In dieser Aufgabe sind die Begriffe leider etwas durcheinander geraten, gemeint war die Komplementbildung (1K und 2K) als *Negation*. Die Überschrift der ersten Tabellenspalte heißt nun präziser "Zahl in 2K-Darstellung". Die Darstellung reiner Dualzahlen fester Länge mit Vorzeichenbit kommt in der Praxis hingegen kaum vor. Zukünftig wird gegebenenfalls genau erläutert, welche der Interpretationen gemeint ist.

g) Wozu werden Einer- und Zweierkomplement verwendet und was sind die jeweiligen Besonderheiten? Welche Operation wurde in f) ausgeführt?

Lösung:

Einer- und Zweierkomplement werden zur Darstellung negativer Ganzzahlen verwendet. Das höchstwertige Bit wird als Vorzeichen interpretiert ($0 \mapsto +$, $1 \mapsto -$).

Besonderheiten:

Beim Einerkomplement gibt es zwei Darstellungen für die Null: Alle Bits 0 ("+0") oder alle Bits 1 ("−0"). Der in Programmen häufig vorkommende Test einer Variable auf den Wert Null erfordert

¹War vorher: "Basis 2 mit Vorzeichen"

daher zwei Vergleiche. Deshalb verwenden moderne Rechner fast ausschließlich das Zweierkomplement. Die in f) durchgeführte Operation ist die *arithmetische Negation*, welche beim Zweierkomplement durch die zusätzliche Addition von Eins zwar aufwändiger ist, aber relativ selten gebraucht wird. Die Bildung des Einerkomplements bei Verwendung der Zweierkomplementdarstellung nennt man *logische Negation*.

Aufgabe 2: Fließkommazahlen (Floating Point)

a) Konvertieren Sie die folgenden Zahlen in die angegebene Basis.

- 10111.11011_2 in die Basis 10

Lösung:

23.84375_{10}

- 37.203125_{10} in die Basis 2

Lösung:

$100101.001101(0)_2$

b) Füllen Sie die folgende Darstellung für IEEE Short Real (1 Bit Vorzeichen, 8 Bits für den verschobenen (*biased*) Exponenten und 23 Bits für den Fraction-Teil) aus, wobei der erste Eintrag bereits als Beispiel vorgegeben ist.

Lösung:

Binär-Wert	Vorzeichen, (biased) Exponent, Fraction
-1,11	1 0111 1111 1100 0000 0000 0000 0000 000
+10001,10001	0 1000 0011 0001 1000 1000 0000 0000 000

Aufgabe 3: Interne Zahlendarstellung

a) In UNIX Systemen wird – aus historischen Gründen – die Zeit in Sekunden seit dem 1. Januar 1970, 0 Uhr gezählt. In welchem Jahr gibt es Probleme mit 32-Bit-Maschinen, wenn die Zahl vorzeichenlos gespeichert ist?

Lösung:

2106. Der genaue Zeitpunkt ist Sonntag, 7. Februar 2106 um 6:27:15 Uhr GMT.

b) In welchem Jahr ist dieser Zeitpunkt, wenn die Zahl als Zweierkomplement interpretiert wird?

Lösung:

2038. Der genaue Zeitpunkt ist Dienstag, 19. Januar 2038 um 03:14:07 Uhr GMT.

Aufgabe 4: Addition von positiven Dualzahlen (unsigned)

Addieren Sie die folgenden Dualzahlen und geben Sie an, ob ein Überlauf aufgetreten ist. Geben Sie dazu auch die entsprechenden dezimalen Werte an. Welcher kleinste und welcher größte Wert kann jeweils mit den vorhandenen Bits dargestellt werden?

a) $01101 + 10010$

Lösung:

= 11111 kein Überlauf

$$13 + 18 = 31$$

$$\text{größter Wert: } 2^5 - 1 = 31$$

b) $1101\ 0010 + 1000\ 0100$

Lösung:

= 1 0101 0110 (Übertrag = Überlauf = Overflow)

$$210 + 132 = 342$$

$$\text{größter Wert: } 2^8 - 1 = 255$$

Aufgabe 5: Addition von Zweierkomplement-Dualzahlen (signed)

Addieren Sie die folgenden Zweierkomplement-Dualzahlen und geben Sie an, ob ein Überlauf aufgetreten ist. Geben Sie dazu auch die entsprechenden dezimalen Werte an. Welcher größte Wert kann jeweils mit den vorhandenen Bits dargestellt werden?

a) $01101 + 10010$

Lösung:

= 11111 kein Überlauf

$$13 + (-14) = -1$$

$$\text{kleinster Wert: } -2^4 = -16, \text{ größter Wert: } 2^4 - 1 = 15$$

b) $01\ 0111 + 01\ 1100$

Lösung:

= (0)11 0011 Überlauf (alte Vorzeichen waren beide 0 \mapsto "+", danach Vorzeichenwechsel)

Ergebnis ist mit 6 Stellen nicht mehr darstellbar, aber mit 7 Stellen.

$$23 + 28 = 51 \text{ bei Betrachtung von 7 Stellen}$$

$$23 + 28 \neq -13 \text{ bei 6 Stellen}$$

$$\text{kleinster Wert: } -2^5 = -32, \text{ größter Wert: } 2^5 - 1 = 31$$